ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

SÉRIE MATHÉMATIQUE

№ 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1939

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ОБЛАСТИ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМ СУЩЕСТВОВАНИЯ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье дается простой принцип доказательств существования, основанный на известной топологической теореме об инвариантности области. Этот принцип применяется к доказательству трех теорем из теории выпуклых тел, из которых две были получены Минковским другим методом, а третья является новой.

Теорема об инвариантности области в простейшей форме состоит в утверждении, что при топологическом отображении n-мерного шара на подмножество n-мерного же эвклидова пространства внутренние точки шара переходят во внутренние точки того множества, на которое шар отображается. Из этого частного утверждения следует известная общая теорема об инвариантности области, которой мы и будем пользоваться: *топологический образ n-мерного многообразия в n-мерном же многообразии представляет открытое множество* *.

На основании этой теоремы мы получаем простой принцип доказательств существования для таких случаев, когда теорема существования имеет характер: «для всякого a существует b, и обратно, для каждого b существует a». Например, основная теорема алгебры утверждает: «всякие n чисел суть корни полинома n-ой степени, и обратно, всякий полином n-ой степени имеет n корней». Доказательство этой теоремы я даю в § 2 лишь для иллюстрации метода. Оно, конечно, не проще известных доказательств, и я даже не уверен, что оно еще не известно **.

Далее я даю три приложения полученного принципа к доказательствам существования в теории выпуклых тел: в §§ 3 и 4 доказываются две основные теоремы Минковского, а в § 5 — теорема, в некотором смысле двойственная его теореме о существовании многогранника с заданными направлениями и площадями граней. Такого рода теоремы могут трактоваться как теоремы о необходимых и достаточных условиях. Так, доказываемая в § 5 теорема дает необходимое и достаточное усло-

---

* Существенно, что у каждой точки n-мерного многообразия есть окрестность, гомеоморфная n-мерному шару. Доказательство теоремы об инвариантности области см. напр. Зейферт Г. и Трелльфалль В., Топология, М.—Л., 1938, стр. 371.

** После того как эта работа была уже написана, в «Матем. сборнике», т. 4 (46): 1, появилась статья Г. М. Голузина, в которой применяется тот же метод доказательства существования.

вие того, чтобы числа $K_1, K_2, \ldots, K_n$ представляли площади сферических изображений вершин (или, что то же самое, величины углов, дуальных углам многогранника) выпуклого n-гранника, все вершины которого лежат на данных n лучах, исходящих из одной точки. Точно так же можно понимать доказываемые в §§ 3 и 4 теоремы Минковского. В § 6 указанная теорема о многогранниках обобщается на любые выпуклые тела.

Все параграфы, кроме § 6, являющегося продолжением § 5, совершенно независимо от друга основываются на § 1, так что их можно читать в произвольном порядке.

§ 1. Основной принцип

*Пусть имеем многообразие A элементов a и связное многообразие B элементов b того же числа измерений, что и A. Пусть A взаимно однозначно и непрерывно отображается на подмножество B' многообразия B так, что если b_n суть образы a_n и b_n сходятся к b, то a_n сходятся к a, являющемуся прообразом b *. Тогда B' совпадает с B, т. е. A отображается на B.*

Докажем это утверждение.

Отображение A на B' есть гомеоморфизм. Поэтому, по теореме об инвариантности области, B' открыто в B. С другой стороны, B' замкнуто в B. Действительно, пусть b_n принадлежат B' и сходятся к b. Тогда по условию b есть образ элемента a, предельного для a_n, представляющих прообразы b_n. Поскольку b есть образ a, постольку оно принадлежит B'. Значит B' замкнуто в B. Но если B' и открыто и замкнуто в B, то оно простирается на все B, так как B связно.

§ 2. Основная теорема алгебры

Пусть a — совокупность n комплексных чисел, не равных друг другу попарно. Порядок чисел не учитывается. Во множестве A всех совокупностей a непрерывность вводится естественным образом: окрестность совокупности $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ определяется условиями $|x_i - x_i^0| < \varepsilon$, когда $\varepsilon < \min\limits_{i \neq j} |x_i^0 - x_j^0|$. Очевидно, что в таком случае A есть $2n$-мерное многообразие.

Пусть b — полином n-ой степени без кратных корней с комплексными коэффициентами и со старшим коэффициентом единица **

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Многообразие B полиномов b также $2n$-мерное.

Каждой совокупности a n чисел отвечает один полином b (по формулам Виета). Каждый полином b имеет не более n корней. Поэтому, если ему соответствует совокупность a его корней, то только одна. Наконец, по формулам Виета коэффициенты зависят от корней непре-

* В силу этого условия отображение взаимно непрерывно.

** Наличие или отсутствие кратных корней, как известно, устанавливается рациональными операциями.

рывно. Следовательно, мы имеем взаимно однозначное и непрерывное отображение многообразия корней A в многообразие полиномов B.

Пусть B' — образ A, т. е. множество полиномов, имеющих n корней. Пусть f — отображение A на B'. Покажем, что если $b_m = f(a_m)$ и $b_m \to b$, то $a_m \to a$, причем $b = f(a)$.

Пусть полиномы b_m, имеющие корни, сходятся к полиному b. Корни полиномов b_m ограничены: именно, если $x_i^{(m)}$ — корни m-го полинома и $a_k^{(m)}$ его коэффициенты, то

$$|x_i^{(m)}| < 1 + \max |a_k^{(m)}|.$$

В силу этого из последовательности $a_1, a_2, \ldots$ совокупностей корней полиномов b_m можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $a_{m_i} \to a$. Но тогда по формулам Виета заключаем, что a есть совокупность корней полинома b, к которому стремятся b_{m_i}. Следовательно, последовательность a_m имеет предел a — совокупность корней полинома b.

Мы видим, что все условия основного принципа выполнены; не доказано только, что многообразие полиномов без кратных корней связно. Как только это будет установлено, то сразу же на основании нашего принципа мы получаем, что всякий полином без кратных корней имеет n корней.

Условие наличия кратных корней состоит в равенстве нулю результанта R полинома и его производной. R есть рациональная функция корней полинома

$$R = a_n^{n-1} + P(a_{n-1}, \ldots, a_1).$$

Нужно доказать, что от одной совокупности чисел $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ можно перейти к другой $(a_1'', a_2'', \ldots, a_n'')$, не обращая функцию R в нуль. Будем переводить $(a_1', a_2', \ldots, a_{n-1}')$ в $(a_1'', a_2'', \ldots, a_{n-1}'')$, сохраняя $a_n = a_n'$. Если при этом среди значений $P(a_{n-1}, \ldots, a_1)$ окажутся равные $-a_n'^{\,n-1}$, то можно будет изменить a_n' так, чтобы этого не получилось*. Во всяком случае мы придем к совокупности $(a_1'', a_2'', \ldots$ $\ldots, a_{n-1}'', a_n''')$.

Теперь, при неизменных $a_1'', a_2'', \ldots, a_{n-1}''$, R может обращаться в нуль только при конечном числе значений a_n. Поэтому достаточно на комплексной плоскости a_n соединить числа a_n''' и a_n'' путем, не проходящим через эти точки.

§ 3. Существование тела с данной опорной функцией

ТЕОРЕМА. *Пусть $H(\bar{u})$ — функция векторов в n-мерном пространстве, положительно однородная, первой степени и выпуклая, т. е.*

1) при $r \geqslant 0$ $H(r\bar{u}) = rH(\bar{u})$,

2) $H(\bar{u} + \bar{v}) \leqslant H(\bar{u}) + H(\bar{v})$.

Существует выпуклое тело с опорной функцией $H(\bar{u})$.

---

* Точку, изображающую число a_n на комплексной плоскости, надо отвести в сторону от пути, который зачерчивает на ней $P(a_{n-1}, \ldots, a_1)$.

Эта теорема впервые была доказана Минковским [1]. Мы докажем ее сперва для опорных функций многогранников, воспользовавшись для этого нашим принципом, а потом предельным переходом перенесем ее на любые опорные функции.

Теорема для случая многогранника гласит:

Пусть в пространстве имеется n единичных векторов $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_n$, *не идущих в одно полупространство. Пусть каждому из этих векторов отнесено по числу* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *так, что если вектор* $\bar{n}_k$ *представляется как комбинация других с неотрицательными коэффициентами*

$$\bar{n}_k = \sum_i \nu_{ki} \bar{n}_i, \tag{1}$$

то

$$H_k < \sum_i \nu_{ki} H_i. \tag{2}$$

Тогда существует выпуклый многогранник, грани которого имеют внешние нормали $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_n$ *и соответственно опорные числа (т. е. расстояния от начала до граней)* $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

Пусть A — многообразие выпуклых многогранников a с внешними нормалями к граням $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_n$. Расстояние между многогранниками определяется как обычное уклонение двух множеств. Пусть B — многообразие упорядоченных совокупностей b n чисел $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$, удовлетворяющих неравенствам (2). B есть не что иное, как внутренность выпуклого многогранника (пересечение полупространств (2)) в n-мерном эвклидовом пространстве. Следовательно, B — связно.

Каждый выпуклый многогранник a имеет опорные числа, удовлетворяющие неравенствам (2). Действительно, пусть $\bar{x}$ — вектор, идущий из начала в точку, лежащую внутри k-ой грани. Тогда

$$\bar{n}_k \bar{x} = H_k. \tag{3}$$

Вместе с тем, так как $\bar{x}$ не лежит ни на одной из плоскостей других граней, то при $i \neq k$

$$\bar{n}_i \bar{x} < H_i. \tag{4}$$

Имея в виду, что

$$\bar{n}_k = \sum \nu_{ki} \bar{n}_i, \tag{1}$$

получаем из (3) и (4) путем очевидных вычислений

$$H_k < \sum \nu_{ki} H_i. \tag{2}$$

Из приведенного вывода ясно также, что равенство

$$H_k = \sum \nu_{ki} H_i \tag{5}$$

возможно только тогда, когда k-ая грань вырождается, т. е. не имеет внутренних точек.

Таким образом мы показали, что многообразие A многогранников отображается в многообразие B. Это отображение взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Установим, наконец, последнее требование нашего принципа. Пусть системы опорных чисел b_n сходятся к системе опорных чисел b. Тогда соответствующие многогранники a_n сходятся к многограннику с системой опорных чисел b. Если бы этот многогранник не был из A, то хотя бы для одного из его опорных чисел имело место равенство (5). Однако этого нет, так как по условию система b его опорных чисел удовлетворяет неравенствам (2).

Следовательно, образ A замкнут в B, но вместе с тем он и открыт в B. Поэтому A отображается на все B, т. е. всякой системе b опорных чисел отвечает многогранник a.

Теперь остается перенести полученный результат на функции $H(\bar{u})$, удовлетворяющие условиям теоремы, указанной в начале этого параграфа.

Заметим прежде всего, что если в неравенствах (2) допускать также знаки равенства (т. е. брать точки на границе многообразия B), то таким системам опорных чисел тоже будут отвечать многогранники, но с некоторыми исчезающими гранями.

Пусть теперь дана функция $H(\bar{u})$ такая, что

1) $$\text{при } r \geqslant 0 \quad H(r\bar{u}) = rH(\bar{u}), \tag{6}$$

2) $$H(\bar{u}+\bar{v}) \leqslant H(\bar{u}) + H(\bar{v}). \tag{7}$$

Возьмем на единичном шаре всюду плотное счетное множество точек и векторы, идущие из центра в эти точки, обозначим $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots$ Каждому из них соответствует значение функции $H(\bar{u})$

$$H_i = H(\bar{n}_i). \tag{8}$$

В силу условий, наложенных на функцию $H(\bar{u})$, эти числа удовлетворяют соотношениям

$$H_k \leqslant \sum \nu_{ki} H_i, \tag{9}$$

где ν_{ki} имеют тот же смысл, что и в формуле (1). Поэтому, начиная с некоторого N (такого, что векторы $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_N$ не идут в одно полупространство), эти числа H_k будут, как мы доказали, определять многогранники A. Совокупность этих многогранников ограничена. Поэтому из нее мы выделим последовательность, сходящуюся к выпуклому телу H. Как известно, тогда опорные функции многогранников будут сходиться к опорной функции тела H. А так как на всюду плотном множестве $\{\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots\}$ значения опорных функций многогранников представляют значения функции $H(\bar{u})$, то данная функция $H(\bar{u})$ и будет опорной функцией предельного тела H.

§ 4. Существование выпуклого многогранника с данными площадями и направлениями граней

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\bar{n}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *любые* n *направлений, среди которых есть три независимых, и* F_i $(i = 1, \ldots, n)$ *любые* n *положительных чисел таких, что*

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{n}_i F_i = 0. \tag{1}$$

Тогда всегда существует выпуклый n-гранник такой, что его грани имеют соответственно площади F_i и внешние нормали $\overline{n_i}$ (2).

Пусть a—класс равных и параллельно расположенных выпуклых многогранников с внешними нормалями $\overline{n_i}$. Расстояние двух таких классов можно определить как точную нижнюю границу расстояний входящих в них многогранников. Совокупность всех таких классов представляет при этом условии $(n-3)$-мерное многообразие * A.

Пусть b — совокупность чисел $(F_1, \ldots, F_n)$, удовлетворяющих условиям теоремы. Многообразие B совокупностей b $(n-3)$-мерное. Оно представляет пересечение положительного координатного угла n-мерного эвклидова пространства

$$F_1 > 0,\ F_2 > 0, \ldots, F_n > 0$$

с $(n-3)$-мерным линейным подпространством, определяемым равенствами (1) (которых три — по числу составляющих векторов $\overline{n_i}$).

Каждому классу a отвечает совокупность площадей его граней. Это соответствие, очевидно, непрерывное. Поэтому многообразие A однозначно и непрерывно отображается на подмножество B' многообразия B. Это отображение взаимно однозначно вследствие теоремы Минковского о единственности с точностью до переноса многогранника с данными площадями граней.

Пусть последовательность $b_1, b_2, \ldots$ из B сходится к b. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ классы многогранников, соответствующие $b_1, b_2, \ldots$ Они ограничены в совокупности, так как площади граней ограничены и не стремятся к нулю. (Если для всех площадей граней F_i имеем $F \geqslant F_i \geqslant f > 0$, то объемы, в силу изопериметрического неравенства

$$36\pi V^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)^3$$

ограничены; а так как

$$V = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} H_i F_i,$$

* Многогранник можно задавать n его опорными числами. В пространстве всех многогранников параллельные друг другу многогранники образуют трехмерное, по числу составляющих переноса, подпространство. Любое такое подпространство получается путем переноса из подпространства точек, т. е. многогранников, параллельных многограннику с опорными числами, равными нулю; при этом такие многогранники не входят в наше многообразие A. Многогранник определяется вектором $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$, составляющие которого суть опорные числа. Если этот вектор откладывать из разных точек указанного подпространства, то этому соответствует построение многогранников с опорными числами $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ относительно любого начала. А это и есть все параллельные многогранники.

Можно также вместо классов параллельных многогранников рассматривать многогранники с центрами тяжести в начале, или такие, опорные числа которых удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{n_i} H_i = 0.$$

Всегда можно так перенести многогранник, чтобы это соотношение выполнялось.

то при всех $H_i > 0$ (начало внутри)

$$H_i < \frac{3V}{f} < \frac{n^{\frac{3}{2}} F^{\frac{3}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}} f},$$

т. е. многогранники ограничены.) Поэтому можно взять сходящуюся подпоследовательность $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$ У многогранника из предельного класса a будет совокупность площадей граней b. Поэтому этот многогранник имеет все n граней. Следовательно, b отвечает некоторому классу многогранников a.

Таким образом, мы убедились, что все требования нашего принципа выполнены и, применяя его, мы получаем доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы о многогранниках получается общая теорема о существовании выпуклого тела с заданной поверхностной функцией ([3]). Мы не будем здесь проводить доказательства этой общей теоремы. Оно аналогично доказательству теоремы § 6 ([4]).

§ 5. Существование выпуклого многогранника с данными сферическими изображениями вершин

Сферическим изображением вершины выпуклого многогранника мы называем телесный угол, заполняемый нормалями к опорным плоскостям в этой вершине. Этот угол дуален телесному углу самого многогранника. В дальнейшем мы будем иметь в виду не самый угол, а его величину.

ТЕОРЕМА. *Пусть из точки O исходят лучи $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n$, не идущие в одно полупространство. Пусть $C_{k_1k_2\ldots k_m}$ — сферическое изображение выпуклой оболочки лучей $\bar{r}_{k_1}, \bar{r}_{k_2}, \ldots, \bar{r}_{k_m}$. Если мы имеем выпуклый многогранник с вершинами на лучах $\bar{r}_i$, то сферические изображения K_i его вершин удовлетворяют неравенствам*

$$\sum K_i > C_{k_1k_2\ldots k_m}, \tag{1}$$

где сумма берется по всем лучам, не попавшим в выпуклую оболочку лучей $\bar{r}_{k_1}, \bar{r}_{k_2}, \ldots, \bar{r}_{k_m}$.

Обратно, если даны числа $K_i > 0$, удовлетворяющие неравенствам (1) *и такие, что их сумма равна 4π, то существует и при том один с точностью до подобия выпуклый многогранник с вершинами, лежащими на лучах $\bar{r}_i$ и имеющими сферические изображения K_i* *.

1. Докажем первую часть теоремы. Пусть имеем выпуклый многогранник H с вершинами на лучах $\bar{r}_i$. Берем лучи $\bar{r}_{k_1}, \ldots, \bar{r}_{k_m}$ и строим их выпуклую оболочку V. Это есть телесный угол с вершиной в точке O.

* Эта теорема сформулирована нами для многогранников в трехмерном пространстве. Однако, она дословно вместе с даваемым ниже доказательством распространяется на многогранники в пространстве любого числа измерений $n \geqslant 2$; нужно только вместо 4π взять поверхность единичного шара в соответствующем пространстве.

Пусть лучи $\bar{r}_{i_1}, \ldots, \bar{r}_{i_l}$, а соответственно и вершины $A_{i_1}, \ldots, A_{i_l}$ оказываются вне V.

Плоскость, опорная к V, пересекает многогранник H, а при движении от O она становится в некоторый момент опорной в вершине многогранника H, не попавшей в V. Следовательно, всякая опорная плоскость к V имеет параллельную ей опорную плоскость к H в одной из вершин $A_{i_1}, \ldots, A_{i_l}$. Кроме того, в этих вершинах есть и другие опорные плоскости, например, плоскости граней, пересекающие V. Отсюда и следует неравенство (1). Отсюда также ясно, что

$$\sum K_i = C_{k_1, \ldots, k_m}$$

тогда и только тогда, когда вершины $A_{i_1}, \ldots, A_{i_l}$ попадают в точку O, и тогда V есть угол самого многогранника.

Таким образом необходимость условий, налагаемых на числа K_i, доказана.

2. Докажем теперь, что два выпуклых многогранника, вершины которых расположены на одних и тех же лучах и имеют равные сферические изображения, подобны.

Пусть H_1 и H_2 — два таких многогранника с вершинами на лучах, идущих из точки O. Уменьшим H_2 подобно с центром подобия O так, чтобы он помещался целиком внутри H_1. Будем теперь увеличивать H_2 подобно, с центром подобия O. В некоторый момент хотя бы одна из его вершин A'' совпадет с лежащей на том же луче вершиной A' многогранника H_1. В этот момент телесный угол при A'' будет лежать в телесном угле при вершине A'. Поэтому дуальный угол при вершине A'', напротив, будет содержать дуальный угол при вершине A'. Но так как величины этих углов по условию равны, то углы совпадают. В таком случае вершины наших многогранников, соседние к A' и A'', совпадают, так как находятся на одних и тех же лучах, исходящих из O. Для дуальных углов при этих вершинах применимы те же рассуждения и т. д.

В результате получаем, что наши многогранники совпали. Значит, до преобразования многогранника H_2 они были подобны.

3. Теперь докажем существование многогранника с данными сферическими изображениями вершин.

Пусть a — класс подобных друг другу выпуклых многогранников с вершинами на данных лучах $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n$. Каждый класс a определяется отношениями чисел $R_1 : R_2 : \ldots : R_n$, дающих расстояния вершин от начала O. Пусть A — многообразие классов a. Это — множество в $(n-1)$-мерном проективном пространстве с координатами $R_1, \ldots, R_n$.

A — действительно многообразие, так как если у данного выпуклого многогранника вершины несколько перемещать, то при достаточно малых, но в остальном произвольных смещениях вершин выпуклая

оболочка их снова будет выпуклым многогранником, для которого они будут действительно вершинами *.

Пусть B — многообразие совокупностей b положительных чисел $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$, сумма которых равна 4π и которые удовлетворяют неравенствам (1). Это есть пересечение внутренности выпуклого многогранника, определяемого неравенством (1) в n-мерном пространстве, с плоскостью

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = 4\pi.$$

Следовательно, B есть многообразие $(n-1)$-мерное и связное.

Каждый многогранник a имеет сферические изображения вершин, удовлетворяющие условиям, определяющим многообразие B. В силу этого многообразие A отображается на множество B' из B. Это отображение непрерывно и взаимно однозначно в силу доказанного в п. 2.

Пусть теперь последовательность $b_1, b_2, \ldots$ из B' сходится к b. Этой последовательности отвечает последовательность $a_1, a_2, \ldots$ Из нее мы выбираем подпоследовательность, сходящуюся к некоторому классу выпуклых многогранников a, который a priori может и не принадлежать многообразию A (а может лежать на его границе в $(n-1)$-мерном проективном пространстве).

Так как при сходимости многогранников сходятся и сферические изображения их вершин, то сферические изображения вершин многогранников класса a даются точкой b из многообразия B. Поэтому сферические изображения всех вершин положительны, т. е. мы имеем реальные вершины. Кроме того, если бы хоть одна из вершин попадала в точку O (одно из $R_i = 0$), то хотя бы вместо одного из неравенств (1) имело место равенство. Таким образом a принадлежит многообразию A и b принадлежит B'. Мы видим, что все требования нашего принципа выполнены и тем самым наша теорема доказана.

§ 6. Обобщение теоремы предыдущего параграфа на произвольные выпуклые тела

Возьмем в пространстве единичный шар с центром O. Пусть $\bar{r}$ обозначает точку на поверхности этого шара, σ — множество на его поверхности, а Σ — полную его поверхность. Мы будем рассматривать выпуклые тела, содержащие точку O внутри. Между точками на поверхности такого тела H и точками на Σ мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие путем сопоставления точек, лежащих на одном луче, идущем из O. Сферическое изображение множества τ на поверхности H есть множество точек на сфере, являющихся концами внешних нормалей к опорным плоскостям, проходящим через точки τ. Каждому множеству σ отвечает множество на поверхности H, а ему в свою очередь — его сферическое изображение, которое мы обозначим

* Нужно, конечно, доказать, что при любых направлениях лучей $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n$, лишь бы они не шли в одно полупространство, вообще существует выпуклый многогранник с вершинами на этих лучах. Это, однако, очевидно: достаточно взять многогранник, вписанный в шар.

$\omega(\sigma)$. Поверхность единичного шара, на котором берутся сферические изображения ω, мы обозначаем Ω.

Интегральной кривизной мы называем площадь сферического изображения. Она оказывается функцией множества σ на сфере Σ. Эту функцию мы обозначаем $K(\sigma)$.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы функция $K(\sigma)$ множества на сфере Σ была интегральной кривизной для некоторого выпуклого тела, содержащего внутри центр O сферы Σ, необходимо и достаточно, чтобы* 1) *она была неотрицательна и вполне аддитивна,* 2) $K(\Sigma)=4\pi$, 3) *для всякого выпуклого* σ

$$K(\Sigma-\sigma)>F(\omega), \tag{1}$$

где $F(\omega)$ — площадь множества ω, двойственно σ, т. е. такого, которое образуется концами нормалей к опорным плоскостям к телесному углу с центром в O и вырезающему на Σ данное множество σ.

Необходимость второго условия очевидна. Необходимость третьего условия доказывается так же, как необходимость аналогичного условия для случая многогранников в предыдущем параграфе. Доказательство необходимости полной аддитивности проводится довольно очевидным путем, совершенно аналогичным тому, каким доказывается полная аддитивность поверхностной функции выпуклого тела ([2]).

Доказательство достаточности условий теоремы и есть доказательство существования выпуклого тела с заданной интегральной кривизной. Оно основано прежде всего на двух леммах.

ЛЕММА I. *Пусть последовательность неотрицательных и вполне аддитивных функций множества $K_1(\sigma)$, $K_2(\sigma)$, ... слабо сходится к $K_0(\sigma)$, и пусть последовательность замкнутых множеств σ_1, σ_2, ... сходится (в смысле топологического предела) к σ_0. Тогда*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} K_n(\sigma_n)\leqslant K_0(\sigma_0). \tag{2}$$

ЛЕММА II. *Если последовательность выпуклых тел H_1, H_2, ..., содержащих центр сферы Σ внутри, сходится к такому же телу H_0, то последовательность соответствующих интегральных кривизн $K_1(\sigma)$, $K_2(\sigma)$, ... слабо сходится к полной кривизне $K_0(\sigma)$ тела H_0.*

Доказательства обеих лемм дадим ниже, а сейчас приступим к доказательству нашей теоремы.

Пусть $K(\sigma)$ — данная функция, удовлетворяющая условиям теоремы. Построим последовательность разбиений сферы Σ на множества σ_{ij} стремящихся к нулю диаметров. Здесь i — номер разбиения, j — номер множества в разбиении. Берем в каждом σ_{ij} по точке $\bar{r}_{ij}$ и строим функцию множества $K_i(\sigma)$, равную всюду нулю кроме точек $\bar{r}_{ij}$, где мы даем ей точечную нагрузку, равную $K(\sigma_{ij})$. Таким путем мы получаем последовательность функций $K_1(\sigma)$, $K_2(\sigma)$, ..., слабо сходящуюся к функции $K(\sigma)$.

Докажем, что при достаточно большом i функция $K_i(\sigma)$ удовлетворяет неравенству (1), которое удобнее переписать несколько иначе, а именно:

$$K_i(\sigma)+F(\omega)<4\pi. \tag{3}$$

Допустим противное. Тогда можно взять последовательность функций $K_{i_1}(\sigma)$, $K_{i_2}(\sigma)$, ... и последовательность выпуклых множеств σ_{i_1}, σ_{i_2}, ... такую, что

$$K_{i_k}(\sigma_{i_k}) + F(\omega_{i_k}) \geqslant 4\pi. \tag{4}$$

Так как из всякой последовательности выпуклых σ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, то можно считать, что этот выбор уже сделан и что последовательность σ_{i_1}, σ_{i_2}, ... сходится к некоторому σ_0. Тогда соответственно ω_{i_k} сходятся к ω_0 и

$$\lim_{k=\infty} F(\omega_{i_k}) = F(\omega_0). \tag{5}$$

Вместе с тем так как $K_{i_k}(\sigma)$ слабо сходятся к $K(\sigma)$, то по лемме 1

$$\overline{\lim_{k=\infty}} K_{i_k}(\sigma_{i_k}) \leqslant K(\sigma_0). \tag{6}$$

Складывая (5) и (6), получаем

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \{K_{i_k}(\sigma_{i_k}) + F(\omega_{i_k})\} \leqslant K(\sigma_0) + F(\omega_0), \tag{7}$$

а на основании неравенства (4)

$$K(\sigma_0) + F(\omega_0) \geqslant 4\pi, \tag{8}$$

что, однако, противоречит условию (неравенству (1) в формуле (3)).

Итак, при любом достаточно большом i точкам $\bar{r}_{ij}$ отнесены неотрицательные числа

$$K_{ij} = K(\sigma_{ij}), \tag{9}$$

удовлетворяющие неравенствам (3).

Очевидно, что неравенства (3) выполняются для выпуклых оболочек комплексов точек $\bar{r}_{ij}$, так как они (неравенства) выполняются для любых выпуклых σ. Кроме того

$$\sum_j K_{ij} = 4\pi. \tag{10}$$

Следовательно, числа K_{ij} удовлетворяют всем условиям теоремы предыдущего параграфа. Поэтому для каждого достаточно большого i существует выпуклый многогранник H_i с вершинами на лучах, идущих из O в точки $\bar{r}_{ij}$, и со сферическими изображениями вершин K_{ij}. Функция $K_i(\sigma)$ есть интегральная кривизна для этого многогранника.

Так как многогранники H_i определены с точностью до подобия, то можно считать, что диаметры их равны единице. При этом условии из них можно выбрать сходящуюся подпоследовательность H_{i_k}. Пусть H — предельное тело этой последовательности. Допустим, что точка O лежит на границе тела H. Построим замкнутый конус V_0, проектирующий H из точки O. Пусть σ_0 — множество, вырезаемое конусом V_0 на Σ. Тогда, если $K_0(\sigma)$ — интегральная кривизна H, то

$$K_0(\sigma_0) + F(\omega_0) = 4\pi. \tag{11}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть σ — множество, содержащее σ_0 внутри себя; V — конус с вершиной O, вырезающей на Σ множество σ; ω соответствует σ. Причем, если σ больше полусферы, то ω пусто. Тогда по лемме I легко заключить, что при соответствующем выборе σ

$$\overline{\lim_{k=\infty}} K_{i_k}(\sigma) \leqslant K(\sigma_0) + \varepsilon. \tag{12}$$

Вместе с тем при достаточно больших k часть поверхности многогранника H_{i_k}, выходящая из V, будет иметь сферическое изображение не большее чем $F(\omega_0)+\varepsilon$. Иначе в пределе сферическое изображение V_0 получалось бы $> F(\omega_0)$. Сумма сферических изображений частей поверхности многогранника, выходящей из V и заключенной в V, равна 4π, и поэтому при таких k

$$K_{i_k}(\sigma) \geqslant 4\pi - F(\omega_0) - \varepsilon. \tag{13}$$

Отсюда

$$K_{i_k}(\sigma) + F(\omega_0) \geqslant 4\pi - \varepsilon, \tag{14}$$

а по формуле (12)

$$K(\sigma_0) + F(\omega_0) \geqslant 4\pi - 2\varepsilon. \tag{15}$$

В силу произвольности ε это противоречит условию, наложенному на функцию $K(\sigma)$. Следовательно, точка O лежит внутри тела H. Поэтому, по лемме II, $K_{i_k}(\sigma)$ слабо сходятся к интегральной кривизне тела H, а вместе с тем они слабо сходятся к данной функции $K(\sigma)$. Следовательно, тело H имеет полную кривизну $K(\sigma)$.

Доказательство леммы I. Пусть функции $K_n(\sigma)$ слабо сходятся к $K_0(\sigma)$. Тогда для всякого замкнутого σ_0 можно указать такую сходящуюся к нему последовательность множеств τ_n, что для всяких $\sigma^n \supset \tau_n$ и сходящихся к σ_0

$$\lim_{n=\infty} K_n(\sigma^n) = K_0(\sigma_0)\,^*. \tag{16}$$

Пусть теперь σ^n содержат и τ^n и σ_n, тогда

$$K_n(\sigma^n) \geqslant K_n(\sigma_n), \tag{17}$$

а по формуле (16)

$$\overline{\lim_{n=\infty}} K_n(\sigma_n) \leqslant K_0(\sigma_0). \tag{2}$$

Доказательство леммы II. Пусть $\bar{n}$ — точка на сфере Ω, или, если угодно, соответствующая нормаль к поверхности тела H. Пусть $\bar{r}(\bar{n})$ — точка на Σ, лежащая на одном луче, идущем из O, с точкой на H, где есть нормаль $\bar{n}$ (проходит опорная плоскость с нормалью $\bar{n}$). Таким образом, установлено отображение сферы Ω на сферу Σ. Оно неоднозначно, если опорная плоскость с нормалью $\bar{n}$ содержит более одной точки поверхности $\bar{r}$. Имеет место следующее простое соотношение:

Пусть $f(\bar{r})$ — непрерывная функция на Σ,

$$\int_{\Sigma} f(\bar{r})\, K(d\sigma) = \int_{\Omega} f(\bar{r}(\bar{n}))\, F(d\omega). \tag{18}$$

Здесь слева стоит интеграл Радона. Справа функция $f(\bar{r}(\bar{n}))$ разрывна на множестве тех $\bar{n}$, которым отвечает не одно $\bar{r}$. На сфере Ω, по которой производится интегрирование, множество таких $\bar{n}$ имеет меру нуль. Поэтому справа имеем интеграл Римана по сфере, на которую производится сферическое изображение **. $F(\omega)$ — площадь множеств на Ω.

* Эта теорема доказана мною в специальной работе, посвященной слабой сходимости вполне аддитивных функций множества, печатающейся в «Матем. сборн.».

** Вообще, как ясно из доказательства, $f(\bar{r})$ может быть любой суммируемой по отношению к $K(\sigma)$ функцией. В таком случае интегралы понимаются в смысле Лебега-Радона.

Для доказательства разобьем промежуток между $\min f(\bar{r})$ и $\max f(\bar{r})$ на n частей

$$\min f(\bar{r}) = f_0 < f_1 < \ldots < f_n = \max f(\bar{r}),$$

причем

$$f_k - f_{k-1} < \frac{\varepsilon}{8\pi}, \tag{19}$$

тогда

$$\left| \int_{\Sigma} f(\bar{r}) K(d\sigma) - \sum f_i K(\sigma_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{20}$$

где σ_i — множество тех $\bar{r}$, где $f_i > f(r) \geqslant f_{i-1}$. Таким образом сфера Ω оказывается покрытой множествами $\omega_i = \omega(\sigma_i)$. Сумма пересечений этих множеств имеет меру нуль, так как общие точки двух множеств $\omega(\sigma_i)$ суть точки неоднозначности $\bar{r}(\bar{n})$. Поэтому

$$\sum f_i K(\sigma_i) = \sum f_i F(\omega_i). \tag{21}$$

А в силу неравенства (19)

$$\left| \int_{\Omega} f(\bar{r}(\bar{n})) F(d\omega) - \sum f_i F(\omega_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

Сравнивая (20), (21), (22) и имея в виду, что ε произвольно, получаем равенство (18).

Докажем теперь лемму II. Пусть $f(\bar{r})$ — непрерывная функция на Σ и пусть $\bar{r}_m(\bar{n})$ — отображение, определенное выше, взятое для m-го тела. Нужно показать, что

$$\lim_{m=\infty} \int_{\Sigma} f(\bar{r}) K_m(d\sigma) = \int_{\Sigma} f(\bar{r}) K_0(d\sigma). \tag{23}$$

В силу леммы I это равносильно тому, что

$$\lim_{m=\infty} \int_{\Omega} f(\bar{r}_m(\bar{n})) F(d\omega) = \int_{\Omega} f(\bar{r}_0(\bar{n})) F(d\omega). \tag{24}$$

Достаточно, таким образом, показать, что $f(\bar{r}_m(\bar{n}))$ сходится к $f(\bar{r}_0(\bar{n}))$ почти везде на Ω. Но $f(\bar{r})$ непрерывна, а потому достаточно, чтобы $\bar{r}_m(\bar{n})$ почти везде сходились к $\bar{r}_0(\bar{n})$. А это верно, ибо, как известно, $\bar{r}_m(\bar{n})$ сходится к $\bar{r}_0(\bar{n})$ во всех точках однозначности $\bar{r}_0(\bar{n})$.

Замечу в заключение, что мне не удалось доказать того, что интегральная кривизна $K(\sigma)$ определяет выпуклое тело однозначно с точностью до подобия.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
15. II. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Minkowski H., Theorie der konvexen Körper, Ges. Abh., Bd. II, 1911; Bonnesen T. und Fenchel W., Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Math., Springer 1934.

[2] Минковский Г., Общие теоремы о выпуклых многогранниках, Усп. мат. наук, т. 2, 1936.

[3] Александров А. Д., К теории смешанных объемов выпуклых тел. III, Матем. сборник, т. 3 (45) : 1 (1938).

[4] Minkowski H., Volumen und Oberfläche, Ges. Abh., Bd. II; Bonnesen-Fenchel, op. cit.; Fenchel und Jessen, Die konvexen Körper und Mengenfunktionen, Math.-physik. Meddelelser, Bd. 16, № 3 (1938).

A. ALEXANDROV. AN APPLICATION OF THE THEOREM ON THE INVARIANCE OF DOMAINS TO EXISTENCE PROOFS

SUMMARY

From the theorem on the invariance of domains the following proposition may be deduced in two words:

Let A be a manifold of elements a and B be a connected manifold of elements b of the same dimensionality as A. Let A be continuously and in one-to-one manner mapped on a subset B' of the manifold B, so that if b_n are the images of a_n and b_n converge to b, then a_n converge to a, of which b is the image. Then B' coincides with B, i. e., A is mapped on B.

This principle is applied to existence proofs. For instance, the proof of the existence of roots of a polynomial may be obtained in the following way. Let A be the manifold of aggregates a of n unequal complex numbers (the order of the numbers being disregarded) and B the manifold of polynomials b of the n-th degree without multiple roots. This manifold is connected. It is easily shown that we may pass from one polynomial to another without making the resultant of the polynomial and its derivative vanish. Since to every n-tuple of numbers corresponds the polynomial whose roots they are, we have a mapping of A into B. It is easy to show that this mapping satisfies the conditions of the principle formulated above.

Similarly may be proved two theorems of Minkowski on the existence of a convex body with a given «Stütz» function and on the existence of a convex body with a given surface function. Our principle is applied to the case of polyhedrons, from which, by a limiting process, we may pass to arbitrary convex bodies.

In the same way we prove the following new theorem:

Let Σ be the surface of a unit sphere with the centre O. Consider a convex body H, containing O inside. Let $K(\sigma)$ be the area of the spherical image of a set on the surface of H, which is the projection of the set σ onto the surface Σ from the point O. The set function $K(\sigma)$ we call t h e i n t e g r a l c u r v a t u r e.

THEOREM. *The set function $K(\sigma)$ is then and only then the integral curvature of a convex body containing O inside, when it is 1) non-negative, 2) totally additive, 3) $K(\Sigma)=4\pi$ and 4) for any convex σ_0*

$$K(\sigma_0)+F(\omega_0)<4\pi,$$

where $F(\omega_0)$ is the area of the set ω_0 dual to σ_0 (i. e., the magnitude of the bodily angle formed by the normals to the «Stütz» planes to the bodily angle with the vertex at O, which cuts out on Σ the set σ).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Л. А. ЛЮСТЕРНИК

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Автор распространяет на однородные операторы теорему о том, что линейный симметрический вполне непрерывный положительный оператор обладает последовательностью положительных собственных значений, стремящихся к нулю.

Рассмотрим в обычном гильбертовом пространстве H непрерывный оператор L, относящий каждому элементу $a \subset H$ элемент $b = La \subset H$; при этом $L(-a) = -La$ для любого положительного λ,

$$L(\lambda a) = \lambda^{q-1} La, \quad q > 1.$$

Такой оператор будем называть однородным порядка $q-1$. Изучение однородного оператора, заданного на всем H, сводится к изучению его для элементов единичной сферы $\|a\| = 1$.

Рассмотрим также функционал $f(a) = (La, a)$. Оператор La, а значит и функционал $f(a)$ будем считать обладающими дифференциалами в смысле Фреше: $df(a, h)$ и $dL(a, h)$ (главные линейные относительно h части приращений $f(a+h) - f(a)$ и $L(a+h) - L(a)$). При этом

$$df(a, h) = (La, h) + (dL(a, h), a).$$

Оператор La будем называть симметрическим, если $(q-1)(La, h) = (dL(a, h), a)$, т. е. $df(a, h) = q(La, h)$. Для линейного оператора La, $dL(a, h) = Lh$ и наше определение симметричности совпадает с обычным.

Оператор La будем называть положительным, если для любого $a \subset H$, $f(a) = (La, a) \geqslant 0$, причем $f(a) = 0$ лишь для $a = \theta_H$. Оператор La называется вполне непрерывным, если он переводит единичную сферу в компактное множество.

Элемент единичной сферы называется собственным элементом оператора L, если

$$La = \lambda a \tag{1}$$

(λ — скаляр); λ называется собственным значением. Очевидно, для собственного элемента a, отвечающего собственному значению λ,

$$f(a) = (La, a) = \lambda(a, a) = \lambda.$$

Для положительного оператора все собственные значения положительны.

ТЕОРЕМА. *Положительный однородный симметрический вполне непрерывный оператор обладает счетным множеством различных собственных значений*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots > 0,$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Эта теорема обобщает аналогичную теорему для линейных вполне непрерывных симметрических положительных операторов.

Введем понятие допустимой деформации множества K единичной сферы: каждому элементу $a \subset K$ и значению параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ отвечает элемент a_t той же сферы, причем a_t сильно непрерывно относительно a и t, $a_0 = a$. При этом $(-a)_t = -a_t$ (диаметрально противоположные элементы a и $-a$ остаются таковыми же). Допустимая деформация ϑ заключается в переходе от элементов $a = a_0 \subset K$ к соответственным элементам $\vartheta a = a_1$ $(t = 1)$. Совокупность K_1 элементов a_1 есть результат допустимой деформации ϑ к $K: K_1 = \vartheta K$.

Деформация ϑ называется возрастающей, если $f(\vartheta a) \geqslant f(a)$.

ЛЕММА. *Для любой константы $c > 0$ множество $(f \geqslant c)$ элементов a единичной сферы $\| a \| = 1$, для которых $f(a) \geqslant c$, может быть посредством возрастающей допустимой деформации ϑ преобразовано в компактное множество $N_c = \vartheta(f \geqslant c)$.*

Каждый элемент $a \subset H$ с компонентами $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$ можно представить в виде

$$a = A_n(a) + R_n(a),$$

где

$$A_n(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots),$$
$$R_n(a) = (0, 0, \ldots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$$

Очевидно $(a, b) = (A_n a, A_n b) + (R_n a, R_n b)$. Оператор L превращает множество $(f \geqslant c)$ в компактное множество; поэтому существует последовательность положительных чисел ε_n, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, такая, что для всех $a \subset (f \geqslant c)$

$$\| R_n(La) \| \leqslant \varepsilon_n. \tag{2}$$

Во всем дальнейшем будем предполагать n выбранным настолько большим, что

$$\varepsilon_n < \frac{c}{2}. \tag{3}$$

Так как для $a \subset (f \geqslant c)$

$$c \leqslant f(a) = (La, a) = (A_n(La), A_n a) + (R_n(La), R_n a),$$

причем, по лемме Шварца и неравенствам (2) и (3),

$$(R_n(La), R_n a) \leqslant \| R_n(La) \| \cdot \| R_n a \| \leqslant$$
$$\leqslant \| R_n(La) \| \cdot \| a \| = \| R_n L(a) \| \leqslant \varepsilon_n < \frac{c}{2},$$

то

$$(A_n(La),\ A_n a) > \frac{c}{2}. \tag{4}$$

Отсюда $A_n a \neq \theta$.

Если $\|a\| = 1$, $A_n a \neq \theta$ и $R_n a \neq \theta$, то можно провести плоскость через θ, $A_n a$ и $R_n a$ и в ней окружности радиуса 1; элемент $a = A_n a + R_n a$ лежит на этой окружности. Если перейти от a к бесконечно близкому элементу той же окружности $a + da$, описав дугу dt в направлении уменьшения $\|R_n a\|$, то (см. чертеж)

$$da = \left(A_n a \frac{\|R_n a\|}{\|A_n a\|} - R_n a \frac{\|A_n a\|}{\|R_n a\|} \right) dt.$$

При этом

$$df(a, da) = q(La, da) =$$

$$= q\,dt \left[(A_n(La), A_n a) \frac{\|R_n(a)\|}{\|A_n(a)\|} - (R_n(La), R_n a) \frac{\|A_n(a)\|}{\|R_n(a)\|} \right].$$

Далее, по (4), лемме Шварца и (2)

$$df(a, da) \geqslant q\,dt \left(\frac{c}{2} \cdot \frac{\|R_n(a)\|}{\|A_n(a)\|} - \|R_n(La)\| \cdot \|A_n a\| \right) \geqslant$$

$$\geqslant q\,dt \left(\frac{c}{2} \|R_n(a)\| - \varepsilon_n \right).$$

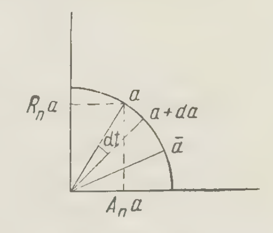
Поэтому, если $\|R_n(a)\| > \frac{2\varepsilon_n}{c}$, то $df(a, da) > 0$.

Положим $\|R_n a\| > \frac{2\varepsilon_n}{c}$. Обозначим через $\bar{a}$ элемент нашей четверти окружности, для которого $\|R_n \bar{a}\| = \frac{2\varepsilon_n}{c}$. При движении по окружности от a к $\bar{a}$ $f(a)$ будет возрастать.

Определим допустимую деформацию ϑ_n множества $(f \geqslant c)$ следующим образом:

1) если $\|R_n(a)\| \leqslant \frac{2\varepsilon_n}{c}$, то элемент a остается неподвижным;

2) если $\|R_n(a)\| > \frac{2\varepsilon_n}{c}$, то элемент a движется по четверти окружности чертежа (см. чертеж) до элемента $\bar{a}$, для которого $\|R_n \bar{a}\| = \frac{2\varepsilon_n}{c}$.



Операция ϑ_n есть операция возрастающая. Каждый элемент a или неподвижен или описывает при этом дугу $a\bar{a}$ единичной окружности (см. чертеж), длина которой не превосходит $2\|R_n a\|$. В результате деформации всякий элемент $a \subset (f \geqslant c)$ переходит в элемент $\vartheta_n a$, тоже принадлежащий $(f \geqslant c)$, причем $R_n \|\vartheta_n a\| \leqslant \frac{2\varepsilon_n}{c}$.

Выберем подпоследовательность целых чисел n_k таких, что $\varepsilon_{n_k} \leqslant \frac{1}{2^k}$. Обозначим через $D_0(a) = a$ и далее через D_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ произведение деформаций $\vartheta_{n_k}\vartheta_{n_{k-1}} \ldots \vartheta_{n_2}\vartheta_{n_1}$. Имеем: $D_k = \vartheta_{n_k} D_{k-1}(a)$; $D_k(a)$ есть

допустимая возрастающая деформация. После деформации $D_k = \vartheta_{n_k} D_{k-1}$ каждый элемент $a \subset (f \geqslant c)$ перейдет в $D_k a = \vartheta_{n_k}(D_{k-1}a)$, у которого $\| R_{n_k}(D_k a) \| \leqslant \varepsilon_{n_k} \leqslant \frac{1}{2^k}$; тем более $\| R_{n_{k+1}}(D_k a) \| \leqslant \frac{1}{2^k}$. При деформации $\vartheta_{n_{k+1}}$ каждый элемент $D_k a$, описав путь длины не более чем $\frac{1}{2^{k-1}}$, перейдет в элемент $\vartheta_{n_{k+1}}(D_k a) = D_{k+1} a$. Отсюда мы видим, что для всех $a \subset (f \geqslant c)$ последовательность $D_k a$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сходится сильно и равномерно (относительно $(f \geqslant c)$) к некоторому элементу Da. Переход от a к $Da = \lim D_{n_k} a$ есть также допустимая и возрастающая деформация $\Big($при этом каждый элемент a описывает путь по длине, не превосходящий $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2\Big)$. В результате деформации D каждый элемент $a \subset (f \geqslant c)$ переходит в элемент Da, для которого $\| R_n(Da) \| \leqslant \frac{1}{2^k}$, если $n \geqslant n_k$. Поэтому множество N_c элементов Da $(a \subset (f \geqslant c))$, в которое перешло $(f \geqslant c)$, компактно. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы.

Первое собственное значение. Обозначим через λ_1 максимум $f(a)$ на единичной сфере $(a, a) = 1$. Очевидно, $\lambda_1 > 0$. Образуем «максимизирующую» последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, для которых $\lim f(a_n) = \lambda_1$. Можно считать, что все эти элементы лежат в $\left(f \geqslant \frac{\lambda}{2}\right)$. Путем допустимой возрастающей деформации D, $\left(f \geqslant \frac{\lambda}{2}\right)$ перейдет в компактное множество N_λ, при этом последовательность a_n перейдет в компактную последовательность Da_n такую, что $f(Da_n) \geqslant$ $\geqslant f(a_n)$. Очевидно, Da_n есть также максимизирующая последовательность: $\lim f(Da_n) = \lambda_1$. Из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность Da_{n_s}; пусть $a^1 = \lim\limits_{s \to \infty} Da_{n_s}$. Имеем $f(a^1) = \lambda_1$, элемент a^1 реализует максимум f при условии $(a, a) = 1$. Существует константа ν такая, что дифференциал от $F = f - \nu(a, a)$, равный $dF(a^1, h) = q(La^1, h) - 2\nu(a^1, h)$, обращается в нуль при любом h,

$$(La^1 - \frac{2}{q}\nu a^1, h) \equiv 0.$$

Отсюда $La^1 = \frac{2}{q}\nu a^1$; a^1 есть собственный элемент, а соответственное собственное значение $\frac{2}{q}\nu$ совпадает с λ_1.

Другие собственные значения. Обозначим через S^n n-мерную сферу, определяемую равенствами: $\| A_{n+1} a \| = 1$, $\| R_n a \| = 0$; далее обозначим через $(\bar{S}^n)$ совокупность всех компактных множеств $\bar{S}^n$, получаемых из S^n путем допустимых деформаций, и через λ_n — верхнюю границу минимумов $f(a)$ на множествах $\bar{S}^n$ класса (S^n). Минимум $f(a)$ на множестве S^n, равный d, достигается; следовательно d положительно, а по определению λ_n, $\lambda_n \geqslant d > 0$.

Пусть $S_1^n, S_2^n, \ldots, S_k^n, \ldots$ — последовательность множеств из $(\overline{S}^n)$ таких, что минимум $f(a)$ на S_k^n при $k \to \infty$ стремится к λ_n. Можно считать, что минимум f на всех S_k^n больше $\frac{\lambda_n}{2}$, т. е. что все S_k^n расположены в $\left(f \geqslant \frac{\lambda_n}{2}\right)$. Путем допустимой возрастающей деформации $\left(f \geqslant \frac{\lambda_n}{2}\right)$ преобразуется в компактное множество N, при этом множества S_k^n перейдут в множества $\overline{S}_k^n$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, принадлежащие тому же классу $(\overline{S}_n)$. Минимум $f(a)$ на каждом $\overline{S}_n^k$ не меньше минимума f на соответственном S_n^k, поэтому минимумы f на $\overline{S}_k^n$ стремятся при $k \to \infty$ к тому же пределу λ_n (ибо превзойти λ_n эти минимумы не могут).

Будем обозначать через T_λ пересечение N с множеством $f=\lambda$. Докажем, что T_{λ_n} содержит собственный элемент (отвечающий собственному значению λ_n). Допустим противное. Тогда для любого $a \subset T_{\lambda_n}$

$$\| La - \lambda_n a \| = \| La - f(a) \cdot a \| > 0.$$

Вследствие компактности T_{λ_n} существует положительная константа c такая, что на T_{λ_n}

$$\| La - f(a) \cdot a \| > \frac{c}{2}.$$

Можно далее указать на такое число $\varepsilon > 0$, что, в сфере $S(T_{\lambda_n}, \varepsilon)$, $\| La - f(a) \cdot a \| \geqslant \frac{c}{2}$. При достаточно малом $\eta > 0$ и $|\lambda - \lambda_n| < \eta$, все T_λ попадут внутрь $S(T_{\lambda_n}, \varepsilon)$.

Определим, аналогично тому, как это делает Морз для конечно-мерного случая, «ортогональные траектории» к T_λ; это суть лежащие в N кривые, элементы которых a_t зависят от параметра t; если для a_t

$$\| La_t - f(a_t), a_t \| > 0,$$

то

$$a_{t+dt} - a_t = da_t = dt\,[La_t - f(a_t)\,a_t]. \tag{5}$$

Из дифференциального уравнения (5) определяются элементы a_t ортогональной траектории, как функции t; при этом

$$d(a_t, a_t) = 2(a_t, da_t) = 2dt\,(a_t, La_t - f(a_t) \cdot a_t) = 0,$$

т. е. a_{t+dt} лежит вместе с a_t на единичной сфере. Далее,

$$df(a_t, da_t) = q\,(La_t, da_t) = q\,(La_t, La_t - f(a_t)\,a_t)\,dt =$$

$$= q\,[(La_t, La_t) - f(a_t)^2]\,dt = q\,[(La_t, La_t)(a_t, a_t) - (La_t, a_t)^2]\,dt.$$

Выражение в квадратных скобках, в силу неравенства Шварца, положительно, если a_t не есть собственный элемент, т. е. если $La_t \neq \lambda a_t$.

Тем самым определяется направление da_t ортогональной траектории для всех точек f_λ, не являющихся собственными элементами, и в частности на $S(T_{\lambda_n}, \varepsilon)$.

Рассмотрим теперь пересечение сферы $S(T_{\lambda_n}, \varepsilon/2)$ с $(f=\lambda_n)$ (оно заключает T_{λ_n}). Из всех точек этого пересечения можно провести ортогональные траектории. При достаточно малом η совокупность дуг этих траекторий, заключенных в области $\lambda_n-\eta \leqslant f(a) \leqslant \lambda_n+\eta$, попадает в $S(T_{\lambda_n}, \varepsilon)$. Обозначим через X теоретико-множественную сумму этих дуг; X заключает некоторую сферу $S(T_{\lambda_n}, \varepsilon_1)$; T_λ при $|\lambda-\lambda_n|<\eta$ принадлежит X.

Так как минимум $f(a)$ на $\overline{S}_k^n$ стремится, не убывая, к λ_n, то при достаточно большом k этот минимум заключен между $\lambda_n-\eta$ и λ_n. Следовательно, $\overline{S}_n^k$ имеют общие точки с T_λ, где $\lambda_n-\eta \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n$. Множества $\overline{S}_n^k$ при достаточно большом k заключены в $(f \geqslant c_n+\eta)+X$.

Определим теперь следующую допустимую деформацию множества $(f \geqslant \lambda_n+\eta)+X$. Именно: элементы из $(f \geqslant \lambda_n+\eta)$ остаются неизменными, каждая же дуга ортогональной траектории из X переходит в часть той же дуги, заключенную в области $\lambda_n+\frac{\eta}{2} \leqslant f(a) \leqslant \lambda_n+\eta$. В результате такой деформации $(f \geqslant \lambda_n+\eta)+X$ перейдет в часть $\left(f \geqslant \lambda_n+\frac{\eta}{2}\right)$. Множества $\overline{S}_k^n$, начиная с некоторого k, перейдут в множества $\overline{\overline{S}}_n^k$, заключенные в $\left(f \geqslant \lambda_n+\frac{\eta}{2}\right)$. Эти множества, с одной стороны, входят в $(\overline{S}^n)$, с другой стороны, минимум f на них больше λ_n. Получаем противоречие с определением λ_n. Тем самым доказано, что λ_n есть собственное значение.

Д о к а з а т е л ь с т в о с т р е м л е н и я λ_n к 0. Последовательность λ_n, очевидно, невозрастающая. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = c > 0$. Путем допустимой возрастающей деформации ϑ множество $\left(f \geqslant \frac{c}{2}\right)$ перейдет в компактное множество N. В силу компактности N мы имеем, при $n\to\infty$, $\|R_n a\| \to 0$, $\|A_n a\| \to 1$ р а в н о м е р н о на N. Поэтому, при достаточно большом n, $\|A_n a\| > \frac{1}{2}$ для всех $a \subset N$.

Определим теперь деформацию ϑ_1 множества N следующим образом: если $\|R_n a\|=0$, то a остается неизменным; если же $\|R_n a\|>0$, то, строя четверть окружности (см. черт.), двигаем a по этой четверти окружности до элемента $\bar{\bar{a}} = \frac{a}{\|a\|}$ (т. е. до элемента $\bar{\bar{a}}$, у которого $\|R_n \bar{\bar{a}}\|=0$). В результате деформации ϑ_1 N перейдет в часть $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1}. Произведение $\vartheta_1\vartheta$ есть допустимая деформация, преобразующая $\left(f \geqslant \frac{c}{2}\right)$ в часть S^{n-1}.

Для любого p $\lambda_p \geqslant c > \frac{c}{2}$; пусть $p \geqslant n$. В классе $(\overline{S}^p)$ найдется множество $\overline{S}^p$, заключенное в $\left(f \geqslant \frac{c}{2}\right)$. Оно получилось в результате допустимой деформации ϑ_2 из сферы S^p. В свою очередь $\overline{S}^p$ вместе со всем $\left(f \geqslant \frac{c}{2}\right)$ при деформации $\vartheta_1\vartheta$ перейдет в часть S^{n-1}. Итак, допустимая деформация $\vartheta_1\vartheta\vartheta_2$ преобразует S^p в часть $\overline{\overline{S}}^p$ сферы S^{n-1}.

Пусть t — параметр деформации ϑ^* $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, S_t^p — множество, в которое переходит S^p в момент t деформации ϑ^*; $S_0^p = S^p$, $S_1^p = \bar{S}^p \subset S^{n-1}$

Теоретико-множественная сумма T всех S_t^p компактна. Ее (так же, как мы это сделали с N) можно деформировать в часть некоторого S^l, причем $l \geqslant p > n-1$. При этом $S_0^p = S^p$ и $S_1^p \subset S^{n-1}$ остаются неизменными; каждое же S_t^p переходит при этом в некоторое $S_t^{p'}$, заключенное в S^l. Можно теперь определить новую допустимую деформацию ϑ^{**} сферы S^p в часть S_1^p сферы S^{n-1} так, что в момент деформации t S^p переходит в $S_t^{p'}$.

Деформация ϑ^{**} переводит, внутри l-мерной сферы S^l, p-мерную сферу S^p в часть $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1}, где $n-1 < p$.

Если идентифицировать пары «противоположных» точек a и $-a$ из S^l, то S^l переходит в l-мерное проективное пространство, а S^p и S^{n-1} — в заключенные в нем p- и $(n-1)$-мерные проективные пространства. Деформацию ϑ^{**} можно рассматривать, как деформацию, внутри l-мерного проективного пространства, p-мерного проективного пространства в часть $(n-1)$-мерного.

Но если такая деформация существует, то p-мерное проективное пространство было бы гомологично нулю (по модулю 2) в l-мерном. Приходим к противоречию, доказывающему сходимость λ_n к 0. Тем самым теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность собственных элементов, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$

Последовательность a_n слабо сходится к нулевому элементу θ.

В самом деле, если бы слабый предел этой последовательности был отличен от 0, то из нее можно было бы выбрать подпоследовательность a_{n_i}, слабо сходящуюся к некоторому элементу a_0, отличному от θ. Но тогда, вследствие полной непрерывности оператора L, последовательность La_{n_i} с и л ь н о сходилась бы к La_0, где La_0 тоже отличен от θ. Но так как $\lambda_{n_0} \to 0$, $La_{n_i} = \lambda_{n_i} a_{n_i}$, то La_{n_i} сходится сильно к θ.

Из доказанного предложения следует, что среди собственных элементов a_n есть бесконечное множество линейно независимых.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
20.II.1939.

L. LUSTERNIK. SUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS NON LINÉAIRES DANS L'ESPACE DE HILBERT

RÉSUMÉ

On sait que les équations intégrales de Fredholm à noyau symétrique positif (et, en général, les opérateurs linéaires positifs complétement continus dans l'espace de Hilbert) possèdent une infinité dénombrable de valeurs caractéristiques positives dont le seul point limite est zéro. Cette propriété a encore lieu pour une classe plus générale d'opérateurs non linéaires. Nous dirons qu'un opérateur l dans l'espace de Hilbert H

est homogène d'ordre $p\,(p>0)$, si $l(\lambda a) = \text{sign}\,|\lambda|^p\, l(a)$ quel que soit λ réel et $a \subset H$. Posons $f(a) = (l(a), a)$ et soit $df(a, h)$ la différentielle de Fréchet de $f(a)$, c'est-à-dire le membre linéaire de l'accroissement $f(a+h) - f(a)$. L'opérateur $l(a)$ sera nommé symétrique, si $df(a, h) = (p+1)(l(a), h)$; ensuite $l(a)$ sera nommé opérateur symétrique positif, si $f(a) \geqslant 0$ et $f(a) = 0$ seulement pour $a = \theta$. Le nombre réel λ sera nommé valeur caractéristique de l'opérateur l, s'il existe un élément $a \subset H$ de norme 1 et pour lequel $l(a) = \lambda a$.

On démontre le théorème suivant:

Si $l(a)$ est un opérateur positif symétrique et complétement continu dans l'espace de Hilbert, il possède une infinité denombrable de valeurs caractéristiques positives $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > \ldots > 0$, et d'ailleurs $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

М. А. НАЙМАРК

ДЕФЕКТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. I.

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе даны формулы для нахождения дефектных подпространств прямого произведения симметрических операторов в случае, если один из этих операторов самосопряженный. Знание этих подпространств дает возможность найти все симметрические расширения прямого произведения.

Настоящая работа посвящена решению вопроса, поставленного в конце моей статьи «О прямом произведении замкнутых операторов» ([1]). Именно, здесь дано явное выражение для дефектных подпространств * прямого произведения $H_1 \times H_2$ в случае, если H_1 — произвольный симметрический, а H_2 — самосопряженный оператор; тем самым в этом случае оказывается возможным обозреть все симметрические расширения $H_1 \times H_2$. Попутно установлен ряд лемм, имеющих самостоятельный интерес. Случай произвольных симметрических H_1, H_2 я имею в виду рассмотреть во второй части этой работы.

Отмечу еще, что в настоящей статье сепарабельность не предполагается.

ЛЕММА 1. *Пусть M — открытое множество комплексной λ-плоскости, а H_λ — ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, непрерывно зависящий ** от λ для всех $\lambda \in M$. Тогда для всякой действительной непрерывной функции $f(x)$ оператор $f(H_\lambda)$ также непрерывно зависит от λ для всех $\lambda \in M$.*

Доказательство. Пусть $[\alpha, \beta]$ — область изменения $(H_{\lambda_0} f, f)$ на единичной сфере $|f| = 1$ $(\lambda_0 \in M)$, и пусть $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 > \beta$. Тогда существует такая окрестность $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, что для всех λ-значений из этой окрестности область изменения $(H_\lambda f, f)$ на сфере $|f| = 1$ находится в $[\alpha_1, \beta_1]$. Пусть $p(x)$ — полином такой, что $|f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\varepsilon > 0)$,

* Дефектными подпространствами $\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i}$ симметрического оператора H называются подпространства векторов f, удовлетворяющих, соответственно, соотношениям $H^*f = if$, $H^*f = -if$.

** Здесь и всюду в дальнейшем речь идет о непрерывной зависимости оператора в смысле нормы оператора, т. е. должно быть

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} |H_\lambda - H_{\lambda_0}| = 0, \quad \lambda_0 \in M.$$

когда $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1$; тогда, по известной теореме Ф. Риса ([2]),

$$|f(A_\lambda) - p(A_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } |\lambda - \lambda_0| < \delta.$$

С другой стороны, $p(A_\lambda)$ является, очевидно, непрерывной функцией λ одновременно с A_λ; поэтому можно выбрать окрестность $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1 < \delta$ так, что в ней $|p(A_\lambda) - p(A_{\lambda_0})| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда, при $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$ имеем

$$|f(A_\lambda) - f(A_{\lambda_0})| \leqslant |f(A_\lambda) - p(A_\lambda)| + |p(A_\lambda) - p(A_{\lambda_0})| + |p(A_{\lambda_0}) - f(A_{\lambda_0})| < \varepsilon.$$

ЛЕММА 2. *Пусть M — открытое множество комплексной λ-плоскости, а T_λ — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$, имеющий ограниченную обратную и непрерывно зависящий от λ для всех значений $\lambda \in M$. Пусть далее $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M}_\lambda$ — его T_λ-образ. Тогда существует частично изометричный оператор U_λ с начальным и конечным подпространствами * $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_\lambda$, также непрерывно зависящий от λ для всех $\lambda \in M$.*

Доказательство. Пусть E — оператор проектирования на $\mathfrak{M}$; положим

$$A_\lambda = E T_\lambda^* T_\lambda E.$$

A_λ — положительно определенный эрмитов оператор, также непрерывно зависящий от λ, и, кроме того, $\mathfrak{M}$ приводит A_λ. Положим далее

$$H_\lambda = \sqrt{A_\lambda};$$

по лемме 1, H_λ — также непрерывная функция λ и $\mathfrak{M}$ приводит H_λ. Кроме того, для всех $f \in \mathfrak{M}$ имеем

$$|H_\lambda f|^2 = (H_\lambda f, H_\lambda f) = (H_\lambda^2 f, f) = (A_\lambda f, f) = (E T_\lambda^* T_\lambda E f, f) = |T_\lambda E f|^2 = |T_\lambda f|^2, \quad (1)$$

поэтому, если C_1, C_2 — положительные постоянные (зависящие от λ) такие, что

$$C_1 |f| \leqslant |T_\lambda f| \leqslant C_2 |f|,$$

то для всех $f \in \mathfrak{M}$ будет также

$$C_1 |f| \leqslant |H_\lambda f| \leqslant C_2 |f|.$$

Таким образом H_λ, рассматриваемый как оператор в $\mathfrak{M}$, имеет там ограниченную обратную H_λ^{-1}, которая, конечно, тоже непрерывно зависит от λ. Поэтому, если положим теперь

$$U_\lambda f = T_\lambda H_\lambda^{-1} f, \quad \text{когда} \quad f \in \mathfrak{M},$$
$$U_\lambda f = 0 \qquad\qquad \text{»} \quad f \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M},$$

то U_λ также будет непрерывной функцией λ. Кроме того, из (1) следует, что для всякого $f \in \mathfrak{M}$

$$|U_\lambda f| = |T_\lambda H_\lambda^{-1} f| = |H_\lambda H_\lambda^{-1} f| = |f|,$$

так что U_λ изометрично отображает $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}_\lambda$; следовательно, U_λ — частично изометричный оператор с начальным и конечным подпространствами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_\lambda$.

* По поводу терминологии см. ([3]), стр. 141.

Следствие. *Пусть T_λ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_\lambda$ — те же, что и в лемме 2. Тогда оператор проектирования E_λ на подпространство $\mathfrak{M}_\lambda$ также является непрерывной функцией λ.*

В самом деле, пусть U_λ — оператор, определенный условиями леммы 2. Тогда $E_\lambda = U_\lambda U_\lambda^*$ — оператор проектирования на $\mathfrak{M}_\lambda$; отсюда непосредственно видно, что E_λ — непрерывная функция λ.

ЛЕММА 3. *Если H — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_\lambda$ — подпространства векторов, удовлетворяющих, соответственно, соотношениям*

$$H^* f = \lambda f, \quad I(\lambda) > 0,$$
$$H^* f = \lambda f, \quad I(\lambda) < 0,$$

а $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ — операторы проектирования на эти подпространства, то $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ — непрерывные функции λ в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ — индекс дефекта H; не нарушая общности, можно считать, что $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, так что для максимального расширения H_1 оператора H дефектной является верхняя полуплоскость. Введем обозначение

$$B_{\lambda_1}^{\lambda_2} = 1 + (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\lambda_2}, \text{ где } R_{\lambda_2} = (H_1 - \lambda_2 1)^{-1},\ I(\lambda_1) > 0,\ I(\lambda_2) > 0;$$

в силу максимальности H_1 и в силу сказанного выше о его дефектной полуплоскости, R_{λ_2}, а следовательно и $B_{\lambda_1}^{\lambda_2}$ существуют при $I(\lambda_2) > 0$ и являются ограниченными операторами. Кроме того, из соотношения

$$R_{\lambda_2} - R_{\lambda_1} = (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\lambda_2} R_{\lambda_1} = (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\lambda_1} R_{\lambda_2}, \quad I(\lambda_1) > 0,\ I(\lambda_2) > 0,$$

непосредственно следует, что при $I(\lambda_1), I(\lambda_2), I(\lambda_3) > 0$

$$B_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdot B_{\lambda_2}^{\lambda_3} = B_{\lambda_1}^{\lambda_3}. \tag{2}$$

В частности, при $\lambda_3 = \lambda_1$ получаем

$$B_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdot B_{\lambda_2}^{\lambda_1} = B_{\lambda_1}^{\lambda_1} = 1, \tag{2a}$$

так что оператор $B_{\lambda_1}^{\lambda}$ имеет ограниченную обратную при $I(\lambda) > 0$, $I(\lambda_1) > 0$. Кроме того,

$$B_{\lambda_1}^{\lambda} = 1 + (\lambda - \lambda_1) R_\lambda$$

(так же, как и R_λ) является непрерывной (даже аналитической) функцией λ.

Пусть теперь $f \in \mathfrak{M}_{\lambda_1}$; положим

$$g = B_{\lambda_1}^{\lambda_2} f = f + (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\lambda_2} f.$$

Так как $R_{\lambda_2} f$ принадлежит области определения $H_1 - \lambda_2 1$, а значит и H_1, то, в силу

$$H^* \supset H_1^* \supset H_1 \supset H,$$

$R_{\lambda_2} f$ принадлежит также области определения H^* и

$$H^* R_{\lambda_2} f = H_1 R_{\lambda_2} f = (H_1 - \lambda_2 1) R_{\lambda_2} f + \lambda_2 R_{\lambda_2} f = f + \lambda_2 R_{\lambda_2} f.$$

Поэтому g также принадлежит области определения H^* и

$$H^*g = \lambda_1 f + (\lambda_2 - \lambda_1)(f + \lambda_2 R_{\lambda_2} f) = \lambda_2 [f + (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\lambda_2} f] = \lambda_2 g,$$

т. е. $g \in \mathfrak{M}_{\lambda_2}$. Итак *

$$B_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathfrak{M}_{\lambda_1} \subset \mathfrak{M}_{\lambda_2}; \tag{3}$$

аналогично

$$B_{\lambda_2}^{\lambda_1} \mathfrak{M}_{\lambda_2} \subset \mathfrak{M}_{\lambda_1},$$

следовательно

$$B_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_{\lambda_2}^{\lambda_1} \mathfrak{M}_{\lambda_2} \subset B_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathfrak{M}_{\lambda_1},$$

откуда в силу (2а) получаем

$$\mathfrak{M}_{\lambda_2} \subset B_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathfrak{M}_{\lambda_1}. \tag{4}$$

Сравнение (3) и (4) дает

$$B_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathfrak{M}_{\lambda_1} = \mathfrak{M}_{\lambda_2},$$

или, если написать λ вместо λ_2,

$$B_{\lambda_1}^{\lambda} \mathfrak{M}_{\lambda_1} = \mathfrak{M}_{\lambda}; \quad I(\lambda_1), I(\lambda) > 0. \tag{5}$$

Аналогично, если $f \in \mathfrak{N}_{\lambda_2}$, то полагаем

$$g = (B_{\overline{\lambda}_1}^{\overline{\lambda}_2})^* f = f + (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\overline{\lambda}_2}^* f, \quad I(\lambda_1) < 0, I(\lambda_2) < 0.$$

Так как $R_{\overline{\lambda}_2}^* f = (H_1^* - \lambda_2 1)^{-1} f$ принадлежит области определения H_1^*, то он принадлежит также области определения H^* и

$$H^* R_{\overline{\lambda}_2}^* f = H_1^* R_{\overline{\lambda}_2}^* f = f + \lambda_2 R_{\overline{\lambda}_2}^* f.$$

Отсюда, как и раньше, заключаем, что

$$(B_{\overline{\lambda}_1}^{\overline{\lambda}})^* \mathfrak{N}_{\lambda_1} = \mathfrak{N}_{\lambda}, \quad I(\lambda_1), I(\lambda) < 0. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем, если воспользуемся следствием из леммы 2, что $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ — непрерывные функции λ.

Замечание. Из приведенного доказательства следует также (см. лемму 2) хорошо известный факт, что $\mathfrak{M}_{\lambda}$ и $\mathfrak{N}_{\lambda}$ имеют постоянные числа измерений для всех λ в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.

ТЕОРЕМА. *Пусть H_1 — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$, а H_2 — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_2$. Пусть далее $E_1(\lambda)$, $F_1(\lambda)$ — операторы проектирования на подпространства $\mathfrak{M}_1(\lambda)$, $\mathfrak{N}_1(\lambda)$ векторов, удовлетворяющих, соответственно, соотношениям*

$$H_1^* f = \lambda f, \quad I(\lambda) > 0,$$

$$H_1^* f = \lambda f, \quad I(\lambda) < 0,$$

---

* Через $B_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathfrak{M}_{\lambda_1}$ мы обозначаем образ $\mathfrak{M}_{\lambda_1}$ при отображении $B_{\lambda_1}^{\lambda_2}$.

а $E_2(\lambda)$ — спектральное разложение H_2. Тогда операторы проектирования E_i, E_{-i} на дефектные подпространства $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}_{-i}$ оператора $H_1 \times H_2$ вычисляются по формулам:

$$E_i = \int_{-\infty}^{-0} F_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) + \int_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda), \tag{7}$$

$$E_{-i} = \int_{-\infty}^{-0} E_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) + \int_{+0}^{+\infty} F_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda), \tag{8}$$

*где сходимость интегралов нужно понимать в смысле сильной топологии для операторов *.*

Доказательство. Докажем сперва нашу теорему для случая, когда H_2 — положительный оператор, не имеющий $\lambda = 0$ своим собственным значением. В этом случае нужно будет доказать, что

$$E_i = \int_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda), \quad E_{-i} = \int_{+0}^{+\infty} F_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda). \tag{9}$$

Прежде всего, докажем существование этих интегралов. Пусть $0 < \alpha < \beta$; так как $E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)$ — непрерывная функция λ в интервале $[\alpha, \beta]$ (см. следствие из леммы 2), то существует такое $\delta > 0$, что из $|\lambda' - \lambda''| < \delta$, $\lambda', \lambda'' \in [\alpha, \beta]$ следует

$$\left| E_1\left(\frac{i}{\lambda'}\right) - E_1\left(\frac{i}{\lambda''}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть далее

$$\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = \beta; \ \lambda_{k-1} \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k;$$

положим

$$S = \sum_{k=1}^{n} E_1\left(\frac{i}{\mu_k}\right) \times E_2(\Delta_k), \text{ где } E_2(\Delta_k) = E_2(\lambda_k) - E_2(\lambda_{k-1}).$$

Мы докажем, что для двух таких сумм S, S' выполняется неравенство

$$|S - S'| < \varepsilon, \tag{10}$$

если обе они удовлетворяют условию $\lambda_k - \lambda_{k-1} < \delta$; тем самым будет доказано существование $\int_{\alpha}^{\beta} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda)$ и при том в равномерной топологии для операторов. Очевидно, достаточно это доказать для случая, когда вторая сумма получается из первой присоединением новых точек деления. Итак, пусть

$$S' = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} E_1\left(\frac{i}{\mu_{kj}}\right) \times E_2(\Delta_{kj}),$$

где $\lambda_{k-1} \leqslant \lambda_{k0} < \lambda_{k1} < \ldots < \lambda_{kp_k} = \lambda_k$, $\lambda_{k,j-1} \leqslant \mu_{kj} \leqslant \lambda_{kj}$, $E_2(\Delta_{kj}) = E_2(\lambda_{kj}) - E_2(\lambda_{k,j-1})$.

* См. статью J. v. Neumann'a (4).

Тогда для произвольного элемента $\Phi \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ имеем *

$$|(S-S')\Phi|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\left[E_1\left(\frac{i}{\mu_k}\right) - E_1\left(\frac{i}{\mu_{kj}}\right)\right] \times E_2(\Delta_{kj})\Phi\right|^2 =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\left[E_1^{(1)}\left(\frac{i}{\mu_k}\right) - E_1^{(1)}\left(\frac{i}{\mu_{kj}}\right)\right] \cdot E_2^{(2)}(\Delta_{kj})\Phi\right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\left|\left[E_1^{(1)}\left(\frac{i}{\mu_k}\right) - E_1^{(1)}\left(\frac{i}{\mu_{kj}}\right)\right] \cdot E_2^{(2)}(\Delta_{kj})\Phi\right|^2 <$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}|E_2^{(2)}(\Delta_{kj})\Phi|^2 \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 |\Phi|^2,$$

следовательно,

$$|S-S'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, существование $\int\limits_{\alpha}^{\beta} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) = \lim\limits_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} S$ доказано. Далее, из неравенства

$$|S\Phi|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|E_1^{(1)}\left(\frac{i}{\mu_k}\right) \cdot E_2^{(2)}(\Delta_k)\Phi\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |E_2^{(2)}(\Delta_k)\Phi|^2 = |E_2^{(2)}(\Delta)\Phi|^2$$

$$(E_2^{(2)}(\Delta) = E_2^{(2)}(\beta) - E_2^{(2)}(\alpha))$$

выводим

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda)\Phi\right| \leqslant |E_2^{(2)}(\Delta)\Phi|,$$

а отсюда, пользуясь свойствами спектрального разложения $E_2^{(2)}(\lambda)$, легко заключить о существовании $\int\limits_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda)\Phi = \lim\limits_{\substack{\alpha \to +0 \\ \beta \to +\infty}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda)$ в сильной топологии для операторов. Так как S — проекционный оператор, то и $I_+ = \int\limits_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda)$ получаемый из S предельным переходом,—проекционный оператор. Аналогично доказываем, что $I_- = \int\limits_{+0}^{+\infty} F\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda)$ существует и является проекционным оператором.

Докажем теперь, что для всякого $\Phi \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$

$$I_+\Phi \in \mathfrak{M}_i, \tag{11}$$

т. е. что

$$(H_1 \times H_2)^* I_+\Phi = iI_+\Phi. \tag{12}$$

---

* По поводу обозначений см. ([1]).

Так как замкнутая линейная оболочка элементов $f \times g \; (f \in \mathfrak{H}_1, \; g \in \mathfrak{H}_2)$ совпадает с $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, а I_+ — ограниченный оператор, то достаточно доказать это утверждение для элементов $\Phi = f \times g$. Из равенств

$$H_1^* E_1\left(\frac{i}{\mu_k}\right) f = \frac{i}{\mu_k} E_1\left(\frac{i}{\mu_k}\right) f, \; H_2^* E_2(\Delta_k) g = H_2 E_2(\Delta_k) g = \int\limits_{\Delta_k} \lambda \, dE_2(\lambda) g$$

заключаем, что имеет смысл

$$(H_1 \times H_2)^* S(f \times g) = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{\mu_k} E_1(\lambda_k) f \times \int\limits_{\Delta_k} \lambda \, dE_2(\lambda) g.$$

Последнее выражение при $\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0, \; \alpha \to +0, \; \beta \to +\infty$ стремится к

$$\int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{i}{\lambda} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) f \times d \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \lambda dE_2(\lambda) g = i \left(\int\limits_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) \right) (f \times g) = iI_+(f \times g);$$

кроме того,

$$S(f \times g) \to I_+(f \times g), \; \lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0, \; \alpha \to +0, \; \beta \to +\infty.$$

Следовательно, в силу замкнутости $(H_1 \times H_2)^*$, имеет смысл

$$(H_1 \times H_2)^* I_+ (f \times g)$$

и

$$(H_1 \times H_2)^* I_+ (f \times g) = iI_+ (f \times g).$$

Таким образом, равенство (12) доказано, т. е. если обозначить область изменения I_+ через $\mathfrak{M}_+$, доказано, что

$$\mathfrak{M}_+ \subset \mathfrak{M}_i.$$

Положим теперь, что $\mathfrak{M}_+$ не исчерпывает $\mathfrak{M}_i$; тогда в $\mathfrak{M}_i$ существует элемент $\Phi_0 \perp \mathfrak{M}_+$. Кроме того, $\Phi_0 \perp$ к подпространству $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_i$, которое, как известно, совпадает с областью изменения оператора $(H_1 \times H_2) + i1$; в частности Φ_0 ортогонален ко всем векторам вида

$$H_1 f \times H_2 g + if \times g = H_1 f \times \int\limits_{+0}^{+\infty} \lambda \, dE_2(\lambda) g + if \times \int\limits_{+0}^{+\infty} dE_2(\lambda) g =$$

$$= \int\limits_{+0}^{+\infty} (\lambda H_1 f + if) \times dE_2(\lambda) g, \qquad (13)$$

где f и g — произвольные векторы из областей определения H_1 и H_2 соответственно.

Пусть теперь φ и ψ — произвольные элементы $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно: так как $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}_i\left(\frac{i}{\lambda}\right)$ совпадает с совокупностью всех векторов вида $H_1 h + \frac{i}{\lambda} h \; (\lambda > 0)$, то для всякого $\lambda > 0$ существует вектор $h(\lambda)$ такой, что

$$\left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right] \varphi = H_1 h(\lambda) + \frac{i}{\lambda} h(\lambda),$$

или, если ввести обозначение $\frac{h(\lambda)}{\lambda} = h_1(\lambda)$,

$$\left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right]\varphi = \lambda H_1 h_1(\lambda) + i h_1(\lambda). \tag{14}$$

При этом, как легко видеть,

$$\lambda^2 |H_1 h_1(\lambda)|^2 + |h_1(\lambda)|^2 = \left|\left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right]\varphi\right|^2 \leqslant |\varphi|^2;$$

следовательно,

$$\lambda |H_1 h_1(\lambda)| < |\varphi|. \tag{15}$$

Положим в (13) $g = E_2(\Delta_k)\psi$, $f = h_1(\mu_k)$ (см. стр. 270), в силу предыдущего получим, что Φ_0 ортогонален к

$$\int_{+0}^{+\infty} [\lambda H_1 h_1(\mu_k) + i h_1(\mu_k)] \times dE_2(\lambda) E_2(\Delta_k)\psi =$$
$$= \int_{\Delta_k} [\lambda H_1 h_1(\mu_k) + i h_1(\mu_k)] \times dE_2(\lambda)\psi.$$

С другой стороны, при $\lambda_k - \lambda_{k-1} < \delta$ имеем (см. (14) и (15))

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left[1 - E_1\left(\frac{i}{\mu_k}\right)\right]\varphi \times E(\Delta_k)\psi - \sum_{k=1}^{n}\int_{\Delta_k}[\lambda H_1 h_1(\mu_k) + i h_1(\mu_k)] \times dE_2(\lambda)\psi\right|^2 =$$
$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\Delta_k}(\mu_k - \lambda) H_1 h_1(\mu_k) \times dE_2(\lambda)\psi\right|^2 = \sum_{k=1}^{n}\int_{\Delta_k}|\mu_k - \lambda|^2 |H_1 h_1(\mu_k)|^2 d|E_2(\lambda)\psi|^2 <$$
$$< \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi|^2}{\mu_k^2}\int_{\Delta_k} d|E_2(\lambda)\psi|^2 \leqslant \frac{\delta^2}{\alpha^2}|\varphi|^2 \cdot |\psi|^2;$$

следовательно,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right]\varphi \times dE_2(\lambda)\psi = \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[1 - E_1\left(\frac{i}{\mu_k}\right)\right]\varphi \times E_2(\Delta_k)\psi =$$
$$= \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0}\sum_{k=1}^{n}\int_{\Delta_k}[\lambda H_1 h_1(\mu_k) + i h_1(\mu_k)] \times dE_2(\lambda)\psi.$$

Так как Φ_0 ортогонален к последней сумме, то он ортогонален также и к ее пределу $\int_{\alpha}^{\beta}\left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right]\varphi \times dE_2(\lambda)\psi$; отсюда, заставляя $\alpha \to +0$, $\beta \to +\infty$, получаем, что Φ_0 ортогонален и к

$$\int_{+0}^{+\infty}\left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right]\varphi \times dE_2(\lambda)\psi. \tag{16}$$

С другой стороны, в силу

$$\int_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\varphi \times dE_2(\lambda)\psi = I_+(\varphi \times \psi) \in \mathfrak{M}_+,$$

Φ_0 ортогонален также и к $\int\limits_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda)\psi$; следовательно, Φ_0 ортогонален и к сумме

$$\int\limits_{+0}^{+\infty}\left[1-E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right]\varphi \times dE_2(\lambda)\psi + \int\limits_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\varphi \times dE_2(\lambda)\psi =$$

$$= \int\limits_{+0}^{+\infty} \varphi \times dE_2(\lambda)\psi = \varphi \times \psi.$$

Так как φ и ψ — произвольные элементы $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, то $\Phi_0 \perp \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, следовательно, $\Phi_0 = 0$.

Таким образом, доказано, что $\mathfrak{M}_+ = \mathfrak{M}_i$, следовательно, $I_+ = E_i$; аналогично доказываем, что $I_- = E_{-i}$, так что для случая, когда H_2 — положительный оператор, не имеющий $\lambda = 0$ своим собственным значением, наша теорема доказана.

Пусть теперь H_2 — произвольный самосопряженный оператор. Обозначим через $\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{H}_-$, $\mathfrak{H}_0$ области изменения проекционных операторов $1-E_2(+0)$, $E_2(-0)$ и $E_2(+0)-E_2(-0)$ соответственно. Подпространства $\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{H}_-$, $\mathfrak{H}_0$ приводят H_2, взаимно ортогональны и их прямая сумма совпадает с $\mathfrak{H}_2$:

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_- \oplus \mathfrak{H}_0.$$

Отсюда

$$\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_- \oplus \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_0,$$

причем подпространства в правой части взаимно ортогональны и приводят $H_1 \times H_2$. Обозначим через H_+,—H_- и H_0 части H_2 в $\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{H}_-$ и $\mathfrak{H}_0$ соответственно; тогда легко видеть, что частями $H_1 \times H_2$ в $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_-$, $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_0$ будут

$$H_1 \times H_+, \ \ -H_1 \times H_-, \ \ H_1 \times H_0; \tag{17}$$

следовательно, E_i и E_{-i} будут совпадать с суммой соответствующих проекционных операторов E_i^+, E_{-i}^+; E_i^-, E_{-i}^-; E_i^0, E_{-i}^0 для прямых произведений (17). Но H_+, H_- — положительные операторы, не имеющие $\lambda = 0$ своим собственным значением, причем их спектральными разложениями являются $E_2(\lambda)$ и $1-E_2(-\lambda)$ $(0 < \lambda < +\infty)$ соответственно, а $H_0 = 0$; поэтому, обозначая соответствующие проекционные операторы для $H_1 \times H_-$ через P_i, P_{-i}, в силу предыдущего имеем

$$E_i^+ = \int\limits_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda), \quad E_{-i}^+ = \int\limits_{+0}^{+\infty} F_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda),$$

$$E_i^- = P_{-i} = -\int\limits_{+0}^{+\infty} F_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(-\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{-0} F_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda),$$

$$E_{-i}^- = P_i = -\int\limits_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(-\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{-0} E_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda),$$

$$E_i^0 = 0, \ \ E_{-i}^0 = 0;$$

следовательно,

$$E_i = E_i^+ + E_i^- + E_i^0 = \int_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) + \int_{-\infty}^{-0} F_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda),$$

$$E_{-i} = E_{-i}^+ + E_{-i}^- + E_{-i}^0 = \int_{+0}^{+\infty} F_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) + \int_{-\infty}^{-0} E_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda)$$

и теорема полностью доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
3. II. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Наймарк М., О прямом произведении замкнутых операторов, Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем., 1939, № 1.

[2] Riesz F., Über die linearen Transformationen im Hilbertschen Raume, Acta Szeged, 5 (1930), 23—54.

[3] Murray F. J. and Neumann J. v., On rings of operators, Ann. of Math., vol. 37 (1936), 116—229.

[4] Neumann J. v., Zur Algebra der Funktionaloperationen, Math. Ann., Bd. 102 (1930), 370—427.

M. NEUMARK. THE DEFICIENCY-SPACES OF THE DIRECT PRODUCT OF SYMMETRIC OPERATORS. I

SUMMARY

In this paper we give an explicit expression for the deficiency-spaces * of the direct product** $H_1 \times H_2$ when H_1 is an arbitrary closed symmetric and H_2 a self-adjoint operator; the case, when H_1 and H_2 are both arbitrary, will be considered in part II. We note also, that separability is not assumed here.

LEMMA 1. *Let M be an open set in the complex λ-plane and H_λ — a bounded self-adjoint operator in $\mathfrak{H}$ continuously*** *depending on λ for all $\lambda \in M$. Then, for every real continuous function $f(x)$, the operator $f(H_\lambda)$ is also a continuous function of λ for all $\lambda \in M$.*

Proof. Let $[\alpha, \beta]$ be the range of $(H_{\lambda_0} f, f)$ on $|f| = 1$ $(\lambda_0 \in M)$ and let $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 < \beta$. Then there exists such a $\delta > 0$, that $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $|f| = 1$ implies $\alpha_1 < (H_\lambda f, f) < \beta_1$. Now choose a polynomial $p(x)$ satisfying $|f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\varepsilon > 0,\ \alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1)$; then (see ([2]))

$$|f(A_\lambda) - p(A_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ when } |\lambda - \lambda_0| < \delta.$$

* We call the manifolds $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_{-i}$ of all characteristic vectors of H^* corresponding resp. to the characteristic values i and $-i$ the deficiency-spaces of the symmetric operator H.

** About all the notations here used, see ([1]).

*** Here and below the continuous dependence of an operator on λ is meant in the sence of the uniform topology for operators, i. e.,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} |H_\lambda - H_{\lambda_0}| = 0, \quad \lambda_0 \in M.$$

Our lemma follows now from this fact and from the obviously continuous dependence of $p(A_\lambda)$ on λ.

LEMMA 2. *Let M be an open set in the complex λ-plane and T_λ — a bounded operator in $\mathfrak{H}$, which has a bounded inverse and continuously depends on λ for all $\lambda \in M$. Let further $\mathfrak{M}$ be a subspace in $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{M}_\lambda$ its T_λ-map. Then there exists a partially isometric operator U_λ with the initial set $\mathfrak{M}$* and the final set* $\mathfrak{M}_\lambda$ *which is also a continuous function of λ for all $\lambda \in M$.*

Proof. Let E be the projection on $\mathfrak{M}$; put

$$H_\lambda = \sqrt{ET_\lambda^* T_\lambda E}.$$

By Lemma 1 H_λ depends continuously on λ and $\mathfrak{M}$ reduces H_λ. For all $f \in \mathfrak{M}$

$$|H_\lambda f|^2 = (H_\lambda^2 f, f) = (ET_\lambda^* T_\lambda E f, f) = |T_\lambda f|^2,$$

and therefore H_λ, considered as an operator in $\mathfrak{M}$, has there a bounded inverse H_λ^{-1}, which is also a continuous function of λ. Now the operator U_λ defined by

$$U_\lambda f = T_\lambda H_\lambda^{-1} f \quad \text{for } f \in \mathfrak{M}$$
$$U_\lambda f = 0 \quad \text{for } f \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$$

possesses all the properties required.

Corollary. *Let T_λ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_\lambda$ be as in Lemma 2. Then the projection E_λ on $\mathfrak{M}_\lambda$ is also a continuous function of λ.*

Proof. Let U_λ be as in Lemma 2; our corollary follows then from $E_\lambda = U_\lambda U_\lambda^*$.

LEMMA 3. *Let H be a closed symmetric operator in $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{M}_\lambda$ and $\mathfrak{N}_\lambda$ — manifolds specified by*

$$H^* f = \lambda f, \; I(\lambda) > 0,$$
$$H^* f = \lambda f, \; I(\lambda) < 0,$$

resp., and $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ the projections on these manifolds. Then $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ are continuous functions of λ for $I(\lambda) > 0$, $I(\lambda) < 0$ resp.

Proof. Let $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ be the deficiency-index of H; we may suppose that $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, so that the deficiency-index of the maximal extension H_1 of H has the form $(\mathfrak{m}_1, 0)$. Put

$$B_{\lambda_1}^{\lambda} = 1 + (\lambda - \lambda_1) R_\lambda, \text{ where } R_\lambda = (H_1 - \lambda 1)^{-1};\; I(\lambda_1), I(\lambda) > 0;$$

$B_{\lambda_1}^{\lambda}$ is, together with R_λ, a bounded operator, which is a continuous (even analytic) function of λ ($I(\lambda) > 0$). From

$$B_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdot B_{\lambda_2}^{\lambda_3} = B_{\lambda_1}^{\lambda_3} \text{ and } B_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdot B_{\lambda_2}^{\lambda_1} = 1$$

---

* About the terminology see (3), p. 141.

it follows that $B^{\lambda}_{\lambda_1}$ has a bounded inverse. If we observe, that $H^* \supset H^*_1 \supset \supset H_1 \supset H$, we easily deduce:

$$\left.\begin{aligned} B^{\lambda}_{\lambda_1} \mathfrak{M}_{\lambda_1} &= \mathfrak{M}_{\lambda}, \quad I(\lambda) > 0,\ I(\lambda_1) > 0, \\ (B^{\bar{\lambda}}_{\bar{\lambda}_1})^* \mathfrak{N}_{\lambda_1} &= \mathfrak{N}_{\lambda},\ I(\lambda) < 0,\ I(\lambda_1) < 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Our lemma follows now from (1) and the corollary to Lemma 2.

THEOREM. *Let H_1 be a closed symmetric operator in $\mathfrak{H}_1$ and H_2 a self-adjoint operator in $\mathfrak{H}_2$. Let further $E_1(\lambda)$, $F_1(\lambda)$ be the projections on the manifolds $\mathfrak{M}_1(\lambda)$, $\mathfrak{N}_1(\lambda)$ specified by*

$$H^*_1 f = \lambda f,\ I(\lambda) > 0,$$
$$H^*_1 f = \lambda f,\ I(\lambda) < 0,$$

resp., and $E_2(\lambda)$ — the resolution of the identity of H_2. Then the projections E_i, E_{-i} on the deficiency-spaces $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}_{-i}$ of H_1, H_2 are given by

$$E_i = \int_{-\infty}^{-0} F_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) + \int_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda), \quad (2)$$

$$E_{-i} = \int_{-\infty}^{-0} E_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) + \int_{+0}^{+\infty} F_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda), \quad (3)$$

the right-hand integrals being convergent in the strong topology for operators (4).

Proof. We may assume that H_2 is positive and $\lambda = 0$ is not its characteristic value; the general case can be easily reduced to this by decomposing $\mathfrak{H}_2$ in a direct sum of 3 mutually orthogonal subspaces, where H_2 is resp. positive, negative and nul. So we have to prove that $E_i = I_+$, $E_{-i} = I_-$, where

$$I_+ = \int_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda),\ I_- = \int_{+0}^{+\infty} F_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda).$$

Using the proved continuity of $E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)$, $F_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right)$ we easily show that I_+, I_- converge in the strong topology for operators and are projections. The closedness of $(H_1 \times H_2)^*$ implies the existence of

$$(H_1 \times H_2)^* I_+ (f \times g) = (H_1 \times H_2)^* \int_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) f \times dE_2(\lambda)\, g =$$

$$= \int_{+0}^{+\infty} \frac{i}{\lambda} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) f \times d \int_{+0}^{\lambda} \lambda\, dE_2(\lambda)\, g = iI_+(f \times g),$$

$$f \in \mathfrak{H}_1,\ g \in \mathfrak{H}_2,$$

so that $I_+(f \times g) \in \mathfrak{M}_i$. By continuity of I_+ we conclude that also

$$I_+ \Phi \in \mathfrak{M}_i \quad \text{for all} \quad \Phi \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2.$$

If now the elements $I_+ \Phi$ do not exhaust $\mathfrak{M}_i$, there exists an element $\Phi_0 \in \mathfrak{M}_i$ which is orthogonal to all $I_+ \Phi$. Since Φ_0 is also orthogonal to $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_i$, i. e., to the range of $H_1 \times H_2 + i1$, it is also orthogonal to all elements of the form

$$(H_1 \times H_2)(f \times g) + i(f \times g) = H_1 f \times \int_{+0}^{+\infty} \lambda \, dE_2(\lambda) g + \\ + if \times \int_{+0}^{+\infty} dE_2(\lambda) g = \int_{+0}^{+\infty} (\lambda H_1 f + if) \times dE_2(\lambda) g. \tag{4}$$

Now let $\varphi \in \mathfrak{H}_1$, $\psi \ni \mathfrak{H}_2$; since the range of $H_1 + \frac{i}{\lambda} 1$ $(\lambda > 0)$ coincides with $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)$, there exists an element $h(\lambda)$ satisfying

$$\left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right] \varphi = \lambda H_1 h(\lambda) + ih(\lambda), \tag{5}$$

and we have

$$\lambda^2 |H_1 h(\lambda)|^2 + |h(\lambda)|^2 = \left| \left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right] \varphi \right|^2 \leqslant |\varphi|^2,$$

and therefore

$$\lambda |H_1 h(\lambda)| < |\varphi| \quad (\lambda > 0). \tag{6}$$

If we put now in (4) $f = h(\mu_k)$, $g = E_2(\Delta_k)\psi$, where

$$\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \beta,$$
$$0 < \alpha < \beta, \ \lambda_{k-1} \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k,$$
$$E_2(\Delta_k) = E_2(\lambda_k) - E_2(\lambda_{k-1}),$$

we obtain that Φ_0 ist orthogonal to

$$\int_{\Delta_k} [\lambda H_1 h(\mu_k) + ih(\mu_k)] \times dE_2(\lambda) \psi$$

and therefore to

$$\int_{+0}^{+\infty} \left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right] \varphi \times dE_2(\lambda) \psi =$$

$$= \lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \beta \to +\infty}} \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k} [\lambda H_1 h(\mu_k) + ih(\mu_k)] \times dE_2(\lambda) \psi$$

(see (5) and (6)).

Thus Φ_0 is orthogonal to

$$I_+(\varphi \times \psi) + \int_{+0}^{+\infty} \left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right] \varphi \times dE_2(\lambda)\psi = \int_{+0}^{+\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \varphi \times dE_2(\lambda)\psi +$$

$$+ \int_{+0}^{+\infty} \left[1 - E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right)\right] \varphi \times dE_2(\lambda)\psi = \varphi \times \psi,$$

and since φ and ψ are arbitrary, it follows that $\Phi_0 = 0$. So we have proved that $\mathfrak{M}_i$ coincides with the set of all $I_+\Phi$, i. e., that $E_1 = I_+$; in the same manner we obtain that $E_{-i} = I_-$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Я. Л. ГЕРОНИМУС

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ F. RIESZ'A И ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕБЫШЕВА-КОРКИНА-ЗОЛОТАРЕВА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Статья содержит некоторые новые результаты, относящиеся к экстремуму $\int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta$, где тригонометрический полином $G(\theta)$ порядка n подчинен определенным условиям.

Введение

В наших работах ([1, 2]) мы рассмотрели решение таких двух экстремальных задач *:

Задача I—II. *Найти минимум интеграла*

$$L(G) = \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta \tag{1}$$

от модуля тригонометрического полинома

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta} \tag{2}$$

порядка n, подчиненного одному из условий:

I. *дано линейное соотношение между его коэффициентами* **

$$\omega^{(c)}(G) = \Re \sum_{k=0}^{s} \bar{\gamma}_k c_{s-k} = 1; \tag{3}$$

$$s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right];$$

II. *даны старшие коэффициенты*

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s;\ s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right]. \tag{4}$$

При решении второй задачи мы воспользовались следующей леммой:

* Там же указана соответствующая литература.

** В этом случае полином $G(\theta)$ порядка не выше n.

ЛЕММА. *Если заданы комплексные числа*

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s,$$

то всегда можно подобрать — и притом единственным образом — полином $r(z)$ степени $\sigma \leqslant s$, все корни которого лежат в области $|z| > 1$, и полином $\tau(z)$ степени $\nu = s - \sigma$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_s z^s + \ldots = r^2(z)\, z^\nu \tau(z)\, \bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{5}$$

Эта лемма вытекает из решения следующей задачи F. Riesz'a ([3]) *:

Задача I′—II′. *Найти минимум интеграла*

$$L(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} |f(z)|\,|dz| \tag{6}$$

от модуля аналитической функции $f(z)$, регулярной в замкнутой области $|z| \leqslant 1$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

и подчиненной одному из условий:

I′. *дано линейное соотношение между первыми коэффициентами*

$$\omega^{(c)}(f) = \sum_{k=0}^{s} a_k c_{s-k} = 1; \tag{7}$$

II′. *даны первые коэффициенты*

$$a_0, a_1, \ldots, a_s. \tag{8}$$

В предлагаемой статье мы решим задачу II, не пользуясь решением задачи F. Riesz'a, и из нашего решения выведем сформулированную лемму; дальше, мы покажем, что решение задачи I′, данное S. Takenaka ([7]), не является наиболее общим и дадим это наиболее общее решение; наконец, пользуясь решением задачи I′ и леммой, дадим решение задачи II′.

Во всем дальнейшем $G(\theta)$ обозначает произвольный полином порядка не выше n, $G^{(\gamma)}(\theta)$ — полином порядка n со старшими коэффициентами $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$; наконец, $G_i(\theta)$ — полином, дающий решение i-ой задачи; аналогичные обозначения — для функций $f(z)$.

§ 1

ТЕОРЕМА I. *Если тригонометрический полином*

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta}$$

* См. также ([4]), ([5]), ([6]).

порядка n обладает тем свойством, что разложение в ряд Fourier $\operatorname{sgn} G(\theta)$ *начинается с гармоник порядка* $\geqslant n-s$, *где* $s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right]$

$$\operatorname{sgn} G(\theta) = \Re \sum_{k=n-s}^{\infty} A_k z^k, \quad z = e^{i\theta}, \tag{9}$$

то $G(\theta)$ *можно представить в таком виде*

$$G(\theta) = \Re\{z^{n-2s+\nu} q^2(z)\} \, |\tau(z)|^2, \quad z = e^{i\theta}, \tag{10}$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant s$, $q(z)$ — *полином степени* $\sigma = s - \nu$, *имеющий все корни в области* $|z| < 1$, *а* $\tau(z)$ — *полином степени* ν; *при этом*

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sgn} G(\theta) = \frac{4}{\pi} \Re \left\{ z^{n-s} \frac{q(z)}{z^{\sigma} \bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k z^k \right\}, \quad z = e^{i\theta}, \\ &\int_0^{2\pi} |G(\theta)| \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_{|z|=1} |\tau(z) \, q(z)|^2 \cdot |dz|. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Покажем прежде всего следующее: **из условия (9) вытекает, что полином** $G(\theta)$ **имеет в интервале** $(0, 2\pi)$ **не менее** $2(n-s)$ **перемен знака.** Допустим противное: пусть

$$G(\theta) = \bar{G}(\theta) \, G^*(\theta),$$

где $\bar{G}(\theta)$ — полином порядка $\leqslant n-s-1$, все корни которого вещественны и различны, а $G^*(\theta) \geqslant 0$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; в таком случае мы имели бы

$$\operatorname{sgn} G(\theta) = \operatorname{sgn} \bar{G}(\theta) = \Re \sum_{k=n-s}^{\infty} A_k z^k, \quad z = e^{i\theta},$$

откуда вытекало бы равенство

$$\int_0^{2\pi} |\bar{G}(\theta)| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \bar{G}(\theta) \operatorname{sgn} \bar{G}(\theta) \, d\theta = 0, \tag{12}$$

что невозможно.

Таким образом $G(\theta)$ имеет $2(n-\nu)$ перемен знака в интервале $(0, 2\pi)$, причем $0 \leqslant \nu \leqslant s$; применяя те же методы, как в §§ 1—2 нашей работы (2), можно показать, что полином $G(\theta)$ можно представить в такой форме:

$$G(\theta) = \Re\{z^{-m} u^2(z)\} \, |\tau(z)|^2, \quad z = e^{i\theta}, \tag{13}$$

где $\tau(z)$ — полином степени ν, а $u(z)$ — полином степени $m = n - \nu$, все корни которого лежат в области $|z| < 1$; при этом

$$\operatorname{sgn} G(\theta) = \frac{4}{\pi} \Re \left\{ \operatorname{arctg} \frac{u(z)}{z^m \bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)} \right\}, \quad z = e^{i\theta}; \tag{14}$$

для того, чтобы выполнялось условие (9) при $s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right]$, необходимо и достаточно, чтобы $u(z)$ было равно

$$u(z) = z^{n-s} q(z), \tag{15}$$

где $q(z)$ — полином степени $\sigma = s - \nu$, все корни которого лежат в области $|z| < 1$. В таком случае окончательно получаем

$$\left.\begin{aligned} G(\theta) &= \Re\{z^{n-2s+\nu} q^2(z)\} \, |\tau(z)|^2, \quad z = e^{i\theta}; \\ \operatorname{sgn} G(\theta) &= \frac{4}{\pi} \Re\left\{z^{n-s} \frac{q(z)}{z^{\sigma} \bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k z^k\right\}, \quad z = e^{i\theta}; \\ L(G) &= \int_0^{2\pi} |G(\theta)| \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_{|z|=1} |q(z) \tau(z)|^2 \, |dz|. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

§ 2

Рассмотрим теперь решение задачи II; решение существует, ибо для искомого полинома $G_2^{(\gamma)}(\theta)$ имеем неравенство

$$\int_0^{2\pi} |G_2^{(\gamma)}(\theta)| \, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |G^{(\gamma)}(\theta)| \, d\theta = L,$$

отсюда находим неравенства для всех его коэффициентов

$$\left.\begin{aligned} |\gamma_k| &\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |G_2^{(\gamma)}(\theta)| \, d\theta \leqslant \frac{L}{\pi} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n); \\ |\gamma_0| &\leqslant \frac{L}{2\pi}. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, значения всех коэффициентов образуют ограниченное замкнутое множество; так как $L(G)$ является непрерывной функцией коэффициентов, то, по теореме Вейерштрасса, $L(G)$ достигает минимума ([8]).

Условия экстремума дают нам

$${}_2^{(\gamma)}(\theta) \quad \Re \sum_{k=n-s}^{\infty} A_k z^k, \quad z = e^{i\theta};$$

следовательно, к полиному $G_2^{(\gamma)}(\theta)$ применима предыдущая теорема.

Докажем теперь, что решение единственно. Если бы мы имели два решения $G_2^{(\gamma)}(\theta)$ и $\bar{G}_2^{(\gamma)}(\theta)$, причем $L(G_2^{(\gamma)}) = L(\bar{G}_2^{(\gamma)})$, то ясно, что

$$L(G_2^{(\gamma)}) \leqslant L\left(\frac{G_2^{(\gamma)} + \bar{G}_2^{(\gamma)}}{2}\right) \leqslant L(G_2^{(\gamma)}),$$

т. е. полиномы $G_2^{(\gamma)}(\theta)$ и $\bar{G}_2^{(\gamma)}(\theta)$ были бы всюду одного знака; поэтому их можно было бы записать таким образом:

$$G_2^{(\gamma)}(\theta) = G^*(\theta) \, |\tau_1(z)|^2, \quad \bar{G}_2^{(\gamma)}(\theta) = G^*(\theta) \, |\tau_2(z)|^2, \quad z = e^{i\theta},$$

где $G^*(\theta)$ имеет $2(n-\nu)$ перемен знака в интервале $(0, 2\pi)$ $(0 \leqslant \nu \leqslant s)$, а $\tau_1(z)$ и $\tau_2(z)$ — полиномы степени ν. В таком случае полином

$$G_2^{(\gamma)}(\theta) - \overline{G}_2^{(\gamma)}(\theta) = G^*(\theta)\{|\tau_1(z)|^2 - |\tau_2(z)|^2\}, \quad z = e^{i\theta},$$

имел бы $2(n-\nu)$ перемен знака в $(0, 2\pi)$, что невозможно, ибо он порядка $n-s-1$.

Итак, решение задачи II существует и единственно, причем оно должно быть вида (10).

Пусть сперва $s < \left[\frac{n}{2}\right]$; в таком случае имеем

$$\Re(\bar{\gamma}_0 z^n + \bar{\gamma}_1 z^{n-1} + \ldots + \bar{\gamma}_s z^{n-s} + \ldots) = \Re\left\{z^{n-2s+\nu} q^2(z)\,\tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}, \quad z = e^{i\theta};$$

при условии $n > 2s$ находим

$$\bar{\gamma}_0 z^n + \bar{\gamma}_1 z^{n-1} + \ldots + \bar{\gamma}_s z^{n-s} + \ldots = z^{n-2s+\nu} q^2(z)\,\tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right); \quad z = e^{i\theta};$$

так как в обеих частях равенства стоят полиномы степени n, то из тождественности их на контуре $|z| = 1$ вытекает тождественность их для всех значений z; отсюда

$$\gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_s z^s + \ldots = r^2(z)\, z^{\nu} \tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{17}$$

где

$$r(z) = z^{\sigma} \bar{q}\left(\frac{1}{z}\right);$$

таким образом доказана лемма, сформулированная во введении.

Пусть теперь $\left[\frac{n}{2}\right] \leqslant s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right]$; на основании доказанной леммы всегда можно подобрать полиномы $r(z)$ и $\tau(z)$ так, чтобы удовлетворялось (17); отсюда находим

$$\bar{\gamma}_0 z^n + \ldots + \bar{\gamma}_s z^{n-s} + \ldots + \frac{\bar{\gamma}_{2s}}{z^{2s-n}} = z^{n-2s+\nu} q^2(z)\,\tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right);$$

при $z = e^{i\theta}$ имеем

$$\Re\left(\frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{z} + \ldots + \frac{\bar{\gamma}_{2s}}{z^{2s-n}}\right) = \Re(\gamma_{n+1} z + \ldots + \gamma_{2s} z^{2s-n});$$

благодаря условию $s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right]$ эти добавочные члены не изменяют старших коэффициентов $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$; таким образом, окончательно имеем и в этом случае

$$G_2^{(\gamma)}(\theta) = \Re(\bar{\gamma}_0 z^n + \ldots + \bar{\gamma}_s z^{n-s} + \ldots) =$$
$$= \Re\left\{z^{n-2s+\nu} q^2(z)\,\tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Докажем теперь, что полином $G_2^{(\gamma)}(\theta)$, определенный таким образом, действительно дает решение задачи II.

Из решения задачи I мы имели ([1]):

$$\frac{L(G)}{|\omega^{(c)}(G)|} \geqslant \frac{L(G_1)}{|\omega^{(c)}(G_1)|}; \tag{18}$$

в таком случае, для любого полинома $G^{(\gamma)}(\theta)$ справедливо неравенство

$$L(G^{(\gamma)}) \geqslant L(G_1^{(\gamma)}); \tag{19}$$

но полином $G_1(\theta)$ определяется формулой ([1])

$$G_1(\theta) = \Re\{z^{n-2s+\nu} q^2(z)\}\, \tau(z)\, \overline{\overline{\tau}}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z = e^{i\theta}; \tag{20}$$

подбирая $q(z)$ и $\tau(z)$ так, чтобы старшие коэффициенты $G_1(\theta)$ стали равными $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$, мы найдем наш полином

$$G_2^{(\gamma)}(\theta) = G_1^{(\gamma)}(\theta); \quad L(G^{(\gamma)}) \geqslant L(G_2^{(\gamma)}).$$

Мы приходим, таким образом, к теореме III нашей работы ([1]).

§ 3

Перейдем к решению задачи I'; по заданным числам

$$c_0, c_1, \ldots, c_s,$$

построим функцию

$$\delta_0 \frac{q(z)}{z^{\sigma} \bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_s z^s + \ldots, \quad |z| \leqslant 1, \tag{21}$$

где $q(z)$ — полином степени $\sigma \leqslant s$, имеющий все корни в области $|z| < 1$; на основании теоремы J. Schur'a ([9]) это всегда можно сделать, если δ_0 — наибольший корень уравнения

$$\begin{vmatrix} \delta & 0 & \ldots & 0 & c_0 & c_1 & \ldots & c_s \\ 0 & \delta & \ldots & 0 & 0 & c_0 & \ldots & c_{s-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \delta & 0 & 0 & \ldots & c_0 \\ \bar{c}_0 & 0 & \ldots & 0 & \delta & 0 & \ldots & 0 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & \ldots & 0 & 0 & \delta & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{c}_s & \bar{c}_{s-1} & \ldots & \bar{c}_0 & 0 & 0 & \ldots & \delta \end{vmatrix} = 0; \tag{22}$$

$\sigma = s - \nu$, где $\nu + 1$ $(\nu \geqslant 0)$ — кратность δ_0.

Имеем неравенство ([7])

$$\frac{L(f)}{|\omega^{(c)}(f)|} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |f(z)|\,|dz|}{\left|\frac{\delta_0}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^s} \cdot \frac{q(z)}{z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)}\,|dz|\right|} \geqslant \frac{1}{\delta_0};$$

знак равенства будет иметь место только тогда, когда функция

$$F(z)=\frac{f(z)}{z^s}\cdot\frac{q(z)}{z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)}, \tag{23}$$

а следовательно, и функция

$$F_1(z)=\frac{F(z)}{q(z)\,\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{f(z)}{z^{\nu}\left[z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2} \tag{24}$$

принимает на контуре $|z|=1$ значения с некоторым постоянным аргументом λ.

Поскольку $f(z)$ и $\left[z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-2}$ регулярны в замкнутой области $|z|\leqslant 1$, мы можем написать разложение

$$e^{-i\lambda}F_1(z)=z^{-\nu}(\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_{2\nu}z^{2\nu}+\ldots),\quad |z|\leqslant 1.$$

Мнимая часть функции $e^{-i\lambda}F_1(e^{i\theta})$ равна нулю, — это приводит к условию

$$\alpha_i=\bar{\alpha}_{2\nu-i}\quad (i=0, 1, \ldots, \nu);\ \alpha_k=0\quad (k=2\nu+1, 2\nu+2, \ldots),$$

т. е. мы должны иметь

$$e^{-i\lambda}F_1(z)=z^{-\mu}P(z), \tag{25}$$

где $P(z)$ — полином степени $2\mu\leqslant 2\nu$, обладающий свойством

$$z^{2\mu}\bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)=P(z).$$

Так как на круге $|z|=1$ функция $e^{-i\lambda}F_1(z)$ должна принимать вещественные неотрицательные значения, то тригонометрический полином $e^{-i\mu\theta}P(e^{i\theta})$ должен быть неотрицательным, — поэтому его можно представить в такой форме:

$$e^{-i\mu\theta}P(e^{i\theta})=|\tau(z)|^2,\quad z=e^{i\theta},$$

где $\tau(z)$ — полином степени $\mu\leqslant\nu$.

Таким образом, полиномы $P(z)$ и $z^{\mu}\tau(z)\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right)$ (оба степени 2μ) совпадают на единичном круге — ясно, что при всех значениях z имеем

$$P(z)=z^{\mu}\tau(z)\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right); \tag{26}$$

пользуясь (24), (25) и (26), находим, что функция $f_1(z)$, осуществляющая минимум (6) при условии (7), выражается формулой

$$f_1(z)=\mathrm{const}\left[z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2 z^{\nu}\tau(z)\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{27}$$

§ 4

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА II. *Для всех функций* $f(z)$, *регулярных в замкнутой области* $|z| \leqslant 1$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

удовлетворяющих соотношению

$$\omega^{(c)}(f) = \sum_{k=0}^{s} a_k c_{s-k} = 1,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_s$ — *заданные комплексные числа, имеет место неравенство*

$$L(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z)|\,|dz| \geqslant \frac{1}{\delta_0}, \tag{28}$$

где δ_0 — *наибольший положительный корень уравнения* (22) *кратности* $\nu + 1$ $(\nu \geqslant 0)$; *знак равенства имеет место для функции*

$$f_1(z) = C\left[z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2 z^{\nu}\tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right), \quad C = 1 : \frac{\delta_0}{2\pi}\int_{|z|=1} |q(z)\tau(z)|^2\,|dz|, \tag{27'}$$

где $\tau(z)$ — *произвольный полином степени не выше* ν, *а* $q(z)$ — *полином степени* $\sigma = s - \nu$, *все корни которого лежат в области* $|z| < 1$ *и который определяется из разложения*

$$\delta_0 \frac{q(z)}{z^{\sigma}\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_s z^s + \ldots, \quad |z| \leqslant 1.$$

Решение S. Takenaka соответствует тому случаю, когда $\nu = 0$, т. е. когда корень δ_0 простой.

Рассмотрим, наконец, решение проблемы II'. На основании леммы всегда возможно — и притом единственным образом — так подобрать полиномы $r(z)$ и $\tau(z)$, чтобы иметь

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_s z^s + \ldots = r^2(z)\, z^{\nu}\,\tau(z)\,\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right); \tag{29}$$

с другой стороны, из решения задачи I' вытекает неравенство

$$\frac{L(f)}{|\omega^{(c)}(f)|} \geqslant \frac{L(f_1)}{|\omega^{(c)}(f_1)|}, \tag{30}$$

где $f_1(z)$ дается формулой (27); подобрав $r(z)$ и $\tau(z)$ из условия (29), мы найдем

$$L(f^{(a)}) \geqslant L(f_1^{(a)}),$$

т. е. полином (29) дает решение задачи II'. Мы приходим к теореме:

ТЕОРЕМА III. *Для всех функций*

$$f^{(a)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

регулярных в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ *и имеющих заданные первые коэффициенты*

$$a_0, a_1, \ldots, a_s,$$

имеет место неравенство

$$L(f^{(a)}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} |f^{(a)}(z)| \, |dz| \geqslant L(f_2^{(a)}) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{|z|=1} |\tau(z) r(z)|^2 |dz|, \quad (31)$$

где функция $f_2^{(a)}(z)$ *дается формулой*

$$f_2^{(a)}(z) = r^2(z) z^{\nu} \tau(z) \bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right); \quad (32)$$

полином $r(z)$ *степени* $\sigma \leqslant s$, *имеющий все корни в области* $|z| > 1$, *и полином* $\tau(z)$ *степени* $\nu = s - \sigma$ *подобраны из условия*

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_s z^s + \ldots = r^2(z) z^{\nu} \tau(z) \bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right). \quad (33)$$

Институт математики и механики
при Харьковском гос. университете.

Поступило
23. I. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Геронимус Я. Л., О некоторых экстремальных задачах, Изв. Ак. Наук СССР, Серия мат., 1937, № 2, стр. 185—202.

[2] Геронимус Я. Л., Об одной экстремальной задаче Чебышева, ibid., 1938, № 4, стр. 445—56.

[3] Riesz F., Über Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern, Acta Mathem., 42 (1920), стр. 145—71.

[4] Геронимус Я. Л., К проблеме коэффициентов для ограниченных функций, Докл. Ак. Наук СССР, XIV (1937), стр. 95—96.

[5] Szász O., Über die Koeffizienten beschränkter Potenzreihen, Math. und Naturwiss. Anzeiger der Ungarischen Akad. der Wiss., XIII (1926), стр. 488—503.

[6] Szász O., Über beschränkte Potenzreihen, ibid., стр. 504—19.

[7] Takenaka S., On the mean modulus of regular functions, Japanese Journ. of Math., II (1925), pp. 47—50.

[8] Бернштейн С. Н., Sur l'application de la méthode de Tchebycheff à une classe de problèmes de M. Fejér, Изв. Ак. Наук СССР (1930), стр. 381—98.

[9] Schur J., Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für die reine und angew. Math., 147 (1917), стр. 205—32; 148 (1918), стр. 122—45.

J. GERONIMUS. SUR UN PROBLÈME DE F. RIESZ ET LE PROBLÈME GÉNÉRALISÉ DE TCHEBYCHEFF-KORKINE-ZOLOTAREFF

RÉSUMÉ

On considère le problème suivant qui est une généralisation du problème de Tchebycheff, Korkine et Zolotareff:

Problème I—II. *Trouver la valeur minimum de l'intégrale*

$$L(G) = \int\limits_0^{2\pi} |G(\theta)| \, d\theta,$$

$G(\theta)$ étant un polynôme trigonométrique d'ordre $\leqslant n$

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta},$$

soumis à l'une des conditions:

I. *les coefficients $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ sont liés par la relation linéaire*

$$\omega^{(c)}(G) = \Re \sum_{k=0}^{s} \bar{\gamma}_k c_{s-k} = 1; \quad s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right];$$

II. *les coefficients*

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \quad s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right],$$

sont donnés.

En s'appuyant sur la solution du problème I qui a été donnée par l'auteur, on résoud le problème II; à cet effet on prouve le lemme suivant:

Lemme. *Étant donnés des nombres complexes*

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s,$$

on peut toujours trouver—et d'une seule manière—un polynôme $r(z)$ de degré $\sigma \leqslant s$ ne s'annulant pas pour $|z| \leqslant 1$, et un polynôme $\tau(z)$ de degré $\nu = s - \sigma$ tels que l'on ait

$$\gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_s z^s + \ldots = r^2(z) z^{\nu} \tau(z) \bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Cela étant, on passe au problème de F. Riesz:

Problème I'—II'. *Trouver la valeur minimum de l'intégrale*

$$L(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z)| \, |dz|,$$

$f(z)$ étant une fonction analytique regulière pour $|z| \leqslant 1$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

soumise à l'une des conditions:

I. *les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_s$ sont liés par la relation linéaire*

$$\omega^{(c)}(f) = \sum_{k=0}^{s} a_k c_{s-k} = 1;$$

II'. *les coefficients*

$$a_0, a_1, \ldots, a_s$$

sont donnés.

On démontre que la solution du problème I' donnée par S. Takenaka n'est pas la plus générale; on trouve la solution la plus générale sans se servir des résultats de F. Riesz. En s'appuyant sur cette solution et sur le lemme on trouve la solution du problème II'.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Serie mathématique

В. А. КРЕЧМАР

О ВЕРХНЕМ ПРЕДЕЛЕ ЧИСЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЦЕЛОГО ЧИСЛА НЕКОТОРЫМИ БИНАРНЫМИ ФОРМАМИ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье доказывается, что число представлений единицы бинарной формой четвертой степени не превосходит двадцати, если кубический инвариант формы равен нулю.

В статье «Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen» (Abhandlungen der Preuss. Akad. d. Wissensch., 1929, Phys.-Math. Klasse) Siegel показывает, что число целых решений неопределенного уравнения

$$\Phi(x, y) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 = k$$

(где $\Phi(x, y)$ есть кубическая форма с целыми рациональными коэффициентами a_0, a_1, a_2, a_3 и положительным дискриминантом D, k — целое число) при достаточно больших D не превосходит 18. В настоящей работе мы показываем, как может быть решена аналогичная задача для некоторых бинарных форм четвертой степени, именно для тех форм, кубический инвариант которых равен нулю.

§ 1. О бинарных формах четвертой степени

Пусть

$$\Phi(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4.$$

Тогда

$$\Phi(x, 1) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4.$$

Пусть корни этого последнего многочлена будут

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4.$$

Дискриминант формы равен тогда

$$D = a_0^6(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2.$$

Известно, что

$$27D = 4I^3 - J^2,$$

где

$$I = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4,$$
$$J = 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_1^2a_4 - 72a_0a_2a_4 + 27a_0a_3^2$$

суть соответственно квадратичный и кубический инварианты. Гессиан нашей формы четвертой степени будет, также, как известно, формой четвертой степени. Обозначим его через $H(x, y)$. Тогда

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)^2 = A_0 x^4 + A_1 x^3 y + A_2 x^2 y^2 + A_3 x y^3 + A_4 y^4,$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= 3(8a_0a_2 - 3a_1^2), \\ A_1 &= 12(6a_0a_3 - a_1a_2), \\ A_2 &= 6(3a_1a_3 + 24a_0a_4 - 2a_2^2), \\ A_3 &= 12(6a_1a_4 - a_2a_3), \\ A_4 &= 3(8a_2a_4 - 3a_3^2). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Обозначим квадратичные и кубические инварианты формы $H(x, y)$ соответственно через $\overline{I}$ и $\overline{J}$, а ее дискриминант через $\overline{D}$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \overline{I} &= A_2^2 - 3A_1A_3 + 12A_0A_4 = 12^2 I^2, \\ \overline{J} &= 2A_2^3 - 9A_1A_2A_3 + 27A_1^2A_4 - 72A_0A_2A_4 + 27A_0A_3^2 = 12^3(2I^3 - J^2), \\ \overline{D} &= 12^6 J^2 D. \end{aligned}$$

§ 2. Формы четвертой степени с кубическим инвариантом, равным нулю

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие бинарные формы четвертой степени

$$\Phi(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4,$$

у которых кубический инвариант J равен нулю. Тогда

$$27D = 4I^3.$$

В этом случае, как легко показать, гессиан $H(x, y)$ будет полным квадратом. Именно, условия, необходимые и достаточные для того, чтобы

$$A_0x^4 + A_1x^3y + A_2x^2y^2 + A_3xy^3 + A_4y^4 \qquad (A_3A_4 \neq 0)$$

было полным квадратом, следующие:

$$\left.\begin{aligned} A_0A_3^2 &= A_4A_1^2, \\ A_3^3 + 8A_1A_4^2 &= 4A_2A_3A_4. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Между тем имеем следующие соотношения:

$$A_0A_3^2 - A_4A_1^2 = 12^3(a_0a_3^2 - a_4a_1^2)J,$$
$$A_3^3 + 8A_1A_4^2 - 4A_2A_3A_4 = 12^3(a_3^3 + 8a_1a_4^2 - 4a_2a_3a_4)J.$$

Отсюда ясно, что условия (2) выполнены, если только $J = 0$, и тогда имеем

$$A_0x^4 + A_1x^3y + A_2x^2y^2 + A_3xy^3 + A_4y^4 =$$
$$= \frac{1}{4A_3^2A_4}(2A_1A_4x^2 + A_3^2xy + 2A_4A_3y^2)^2.$$

§ 3. О преобразовании формы $\Phi(x, y)$

Положим

$$x = m\xi + l\eta,$$
$$y = p\xi + q\eta, \text{ где } mq - lp = \Delta,$$

и пусть

$$\Phi(x, y) = \Phi(m\xi + l\eta,\ p\xi + q\eta) = a_0'\xi^4 + a_1'\xi^3\eta + a_2'\xi^2\eta^2 + a_3'\xi\eta^3 + a_4'\eta^4.$$

Как известно, форма

$$H(x, y) = A_0x^4 + A_1x^3y + A_2x^2y^2 + A_3xy^3 + A_4y^4$$

является ковариантом, и мы имеем тождество

$$A_0'\xi^4 + A_1'\xi^3\eta + A_2'\xi^2\eta^2 + A_3'\xi\eta^3 + A_4'\eta^4 = \Delta^2 \cdot H(x, y).$$

Выберем теперь ξ и η так, чтобы имело место тождество

$$2A_1A_4x^2 + A_3^2xy + 2A_4A_3y^2 = \xi\eta.$$

Тогда положим

$$\xi = \lambda(\alpha x + \beta y), \qquad \lambda\mu = 1.$$
$$\eta = \mu(\gamma x + \delta y),$$

Теперь имеем

$$A_1'\xi^4 + A_1'\xi^3\eta + A_2'\xi^2\eta^2 + A_3'\xi\eta^3 + A_4'\eta^4 = \frac{\Delta^2}{4A_3^2A_4} \cdot \xi^2\eta^2,$$

где

$$A_0' = 3(8a_0'a_2' - 3a_1'^2),$$
$$A_1' = 12(6a_0'a_3' - a_1'a_2') \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда следует, что подобное преобразование дает

$$A_0' = A_1' = A_3' = A_4' = 0; \quad A_2' = \Delta^2 \cdot \frac{1}{4A_3^2A_4}.$$

Посмотрим, во что переводит это преобразование форму $\Phi(x, y)$, т. е. чему равны

$$a_0', \quad a_1', \quad a_2, \quad a_3', \quad a_4'.$$

Легко проверить, что имеет место следующее тождество:

$$-10a_4A_0 + 2a_3A_1 - a_2A_2 + a_1A_3 - 2a_0A_4 = 6J.$$

Но так как J есть инвариант, то $J' = J = 0$, и следовательно

$$-10a_4'A_0' + 2a_3'A_1' - a_2'A_2' + a_1'A_3' - 2a_0'A_4' = 0.$$

Отсюда (так как $A_0' = A_1' = A_3' = A_4' = 0$, $A_2' \neq 0$) следует

$$a_2' = 0,$$

а значит (см. равенство (1))

$$a_1' = a_3' = 0.$$

Таким образом имеем

$$\Phi(x, y) = \Phi(m\xi + l\eta,\ p\xi + q\eta) = a_0'\xi^4 + a_4'\eta^4.$$

При этом

$$a_0' = \Phi(m, p),$$
$$a_4' = \Phi(l, q).$$

Так как, с другой стороны,

$$\xi = \lambda(\alpha x + \beta y), \qquad \lambda\mu = 1,$$
$$\eta = \mu(\gamma x + \delta y),$$

то

$$\Delta = mq - lp = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \frac{1}{\Delta'}$$

(полагая $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta'$). Поэтому

$$a_0' = \Phi(m, p) = \frac{1}{\lambda^4\Delta'^4} \cdot \Phi(\delta, -\gamma),$$

$$a_4' = \Phi(l, q) = \frac{1}{\mu^4\Delta'^4} \cdot \Phi(-\beta, \alpha).$$

Подберем теперь λ и μ так, чтобы

$$a_0' = -a_4';$$

для этого должно быть

$$\frac{\mu^4}{\lambda^4} = -\frac{\Phi(-\beta, \alpha)}{\Phi(\delta, -\gamma)}.$$

При таком выборе λ и μ будет:

$$\Phi(x, y) = a_0'(\xi^4 - \eta^4).$$

При этом

$$A_2' = \Delta^2 \frac{1}{4A_3^2 A_4}.$$

С другой стороны,

$$A_2' = 6(3a_1'a_3' + 24a_0'a_4' - 2a_2'^2) = 144a_0'a_4',$$

следовательно,

$$a_0'^2 = -\frac{\Delta^2}{24^2 A_3^2 A_4}.$$

Но

$$\Delta^2 = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}$$

и

$$2A_1A_4x^2 + A_3^2xy + 2A_3A_4y^2 = (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y).$$

Отсюда

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = A_3^4 - 16A_1A_4^2A_3$$

и

$$a_0'^2 = -\frac{1}{24^2 A_3^2 A_4 (A_3^4 - 16A_1A_4^2A_3)}.$$

Вычислением находим:

$$A_3^4 - 16A_1A_4^2A_3 = 48A_3^2A_4I;$$

следовательно,

$$a_0' = \frac{1}{96A_3^2A_4\sqrt{-3I}}.$$

Кроме того имеем

$$\sqrt{A_3^4 - 16A_1A_4^2A_3} = \frac{4A_3^2}{A_1}\sqrt{3IA_0}.$$

§ 4. О корнях уравнения $\Phi(x, 1) = 0$

Пусть

$$\delta_1 = 3a_1^2 - 8a_0a_2,$$
$$\delta_2 = -6a_1^3a_3 + 2a_1^2a_2^2 - 12a_0a_1^2a_4 + 28a_0a_1a_2a_3 - 8a_0a_3^2 + 32a_0^2a_2a_4 - 36a_0^2a_3^2.$$

Известно, что условие, необходимое и достаточное для вещественности всех корней уравнения

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

будет:

$$\delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0, \quad D > 0.$$

Отметим, что имеют место соотношения:

$$a_0J = -\frac{3}{4}\delta_2 + \frac{1}{2}\delta_1 I \quad \text{и} \quad A_0 = -3\delta_1.$$

Если же $J = 0$, то

$$\frac{3}{4}\delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1 I.$$

Таким образом, если все корни уравнения $\Phi(x, 1) = 0$ вещественны, то

$$D > 0, \quad I > 0, \quad \delta_1 > 0.$$

Ограничимся лишь тем случаем, когда все корни уравнения $\Phi(x, 1) = 0$ вещественны.

Итак, мы можем утверждать следующее:
форма

$$\Phi(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4$$

путем преобразования

$$\xi = \lambda(\alpha x + \beta y),$$
$$\eta = \mu(\gamma x + \delta y)$$

может быть приведена к двучленному виду

$$a_0'(\xi^4 - \eta^4).$$

Таким образом имеем тождественно

$$a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4 = a_0'(\xi^4 - \eta^4),$$

где

$$a_0' = \frac{1}{96A_3^2A_4\sqrt{-3I}}$$

принадлежит к мнимой квадратичной области $R(\sqrt{-3I})$, а α, β, γ, δ принадлежат к области $R\left(\sqrt{A_3^4-16A_1A_4^2A_3}\right)$, т. е. также к мнимой квадратичной области $R(\sqrt{-I\delta_1})$.

§ 5. Второй ковариант (якобиан)

Положим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}=Q(x,y).$$

Отсюда

$$Q(x,y)=\frac{1}{2A_3^2A_4}(2A_1A_4x^2+A_3^2xy+2A_4A_3y^2)\cdot\psi(x,y),$$

где

$$\psi(x,y)=(A_3^2x+4A_3A_4y)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-(4A_1A_4x+A_3^2y)\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

— многочлен четвертой степени с целыми рациональными коэффициентами. Известно, что имеет место следующее тождество:

$$16H^3+9Q^2=4^4\cdot3^3\cdot IH\Phi^2. \tag{3}$$

Положим

$$2A_1A_4x^2+A_3^2xy+2A_4A_3y^2=\omega(x,y).$$

Тогда

$$Q(x,y)=\frac{1}{2A_3^2A_4}\,\omega(x,y)\,\psi(x,y);$$

и равенство (3) переходит в следующее:

$$\omega^4(x,y)+9A_3^2A_4\psi^2(x,y)=4^4\cdot3^3\cdot IA_3^4A_4^2\Phi^2(x,y). \tag{4}$$

Применим к этому последнему равенству рассмотренное нами прежде дробно-линейное преобразование. Будем иметь:

$$\omega(x,y)=\xi\cdot\eta,$$
$$\Phi(x,y)=a_0'(\xi^4-\eta^4).$$

Равенство же (4) перейдет в следующее:

$$(\xi+\eta^4)^2=-36A_3^2A_4\cdot\psi^2(x,y)$$

или

$$\xi^4+\eta^4=\frac{6A_3^2}{A_1}\sqrt{3\delta_1}\cdot\psi(x,y).$$

Напомним, что $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ принадлежат к мнимой квадратичной области; $R(\sqrt{-I\delta_1})$ и $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^4=-\frac{\Phi(-\beta,\alpha)}{\Phi(\delta,-\gamma)}$ принадлежит к той же области.

Пусть x и y суть целые числа, удовлетворяющие уравнению $\Phi(x,y)=k$ (решение этого уравнения). Тогда

$$a_0'(\xi^4-\eta^4)=\Phi(x,y)=k.$$

Отсюда

$$1-\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^4=\frac{96A_3^2A_4\sqrt{-3I}\cdot k}{\xi^4}.$$

Положим

$$\frac{96A_3^2A_4\sqrt{-3I}}{\xi^4}=z.$$

С другой стороны, имеем

$$\xi^4+\eta^4=\frac{6A_3^2}{A_1}\sqrt{3\delta_1}\cdot\psi(x,y).$$

Отсюда

$$\xi^4-\eta^4=a\sqrt{3I}\cdot i,$$
$$\xi^4+\eta^4=b\sqrt{3\delta_1},$$

где a и b — рациональные. Из этого следует, что

$$2\xi^4=b\sqrt{3\delta_1}+a\sqrt{3I}\cdot i$$
$$2\eta^4=b\sqrt{3\delta_1}-a\sqrt{3I}\cdot i \qquad (I>0,\ \delta_1>0)$$

и значит

$$\left|\frac{\eta}{\xi}\right|=1, \text{ т. е. } |1-z|=1.$$

Легко видеть, что $\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^4$ принадлежит к области $R\left(\sqrt{-I\delta_1}\right)$. К этой же области принадлежит и z. Так как

$$(\xi^4+\eta^4)^2=-36A_3^2A_4\psi^2(x,y),$$
$$\xi^4\eta^4=\omega^4(x,y),$$

то ξ^4 и η^4 целые алгебраические числа. Следовательно, ξ и η также целые алгебраические.

§ 6. Неравенства

Итак, соответственно каждому решению уравнения $\Phi(x,y)=k$ мы имеем пару целых алгебраических чисел ξ и η, удовлетворяющих равенству

$$1-\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^4=z,$$

где

$$z=\frac{96A_3^2A_4k\sqrt{-3I}}{\xi^4}.$$

Следовательно,

$$\frac{\eta}{\xi}=\varepsilon\sqrt[4]{1-z},$$

где ε есть корень четвертой степени из единицы ($\varepsilon^4=1$), а $\sqrt[4]{1-z}$ есть главное значение корня.

Докажем, что

$$|\varepsilon\xi-\eta|\leqslant\frac{2|K|\cdot|k|\cdot\sqrt{3I}}{|\xi|^3},$$

где $K=96A_3^2A_4$.

Допустим сначала, что $|z| \geqslant 1$. Имеем:

$$|\varepsilon\xi - \eta| \leqslant |\xi| + |\eta| \leqslant 2|\xi|.$$

Поэтому

$$|\varepsilon\xi - \eta| \leqslant 2|\xi| \cdot |z| = \frac{2|K| \cdot |k| \cdot \sqrt{3I}}{|\xi|^3}.$$

Допустим теперь, что $|z| < 1$. Докажем, что и в этом случае

$$|\varepsilon\xi - \eta| \leqslant \frac{2|K| \cdot |k| \cdot \sqrt{3I}}{|\xi|^3} = 2|z| \cdot |\xi|.$$

Имеем

$$|\varepsilon\xi - \eta| = |\xi| \cdot \left|\varepsilon - \frac{\eta}{\xi}\right| = |\xi| \cdot \left|\varepsilon - \varepsilon\sqrt[4]{1-z}\right|.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$|1 - \sqrt[4]{1-z}| < 2|z|.$$

Допустим, что уравнение $\Phi(x, y) = k$, кроме решения (x, y), имеет еще решение (x', y'), и пусть значения ξ и η для этого решения будут ξ' и η'. Допустим, что эти решения принадлежат к одному и тому же ε, т. е. значения ε в равенствах

$$\frac{\eta}{\xi} = \varepsilon\sqrt[4]{1-z},$$

$$\frac{\eta'}{\xi'} = \varepsilon\sqrt{1-z'}, \quad z' = \frac{2|K| \cdot |k| \cdot \sqrt{3I}}{|\xi'|^3}$$

одни и те же. Тогда имеем:

$$|\varepsilon\xi - \eta| \leqslant \frac{2|K| \cdot |k| \cdot \sqrt{3I}}{|\xi|^3},$$

$$|\varepsilon\xi' - \eta'| \leqslant \frac{|2K| \cdot |k| \cdot \sqrt{3I}}{|\xi'|^3}.$$

Отсюда

$$|\xi\eta' - \eta\xi'| = |\xi(\eta' - \varepsilon\xi') - \xi'(\eta - \varepsilon\xi)| \leqslant 2|K| \cdot |k| \cdot \sqrt{3I}\left(\frac{|\xi|}{|\xi'|^3} + \frac{|\xi'|}{|\xi|^3}\right).$$

Далее напомним, что

$$\xi = \lambda(\alpha x + \beta y), \qquad \eta = \mu(\gamma x + \delta y), \qquad \lambda\mu = 1.$$

Следовательно,

$$\xi\eta' - \eta\xi' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(xy' - x'y).$$

Но

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 48 A_3^2 A_4 I,$$

а

$$|xy' - x'y| \geqslant 1.$$

Поэтому

$$|\xi\eta' - \eta\xi'| \geqslant \frac{12 A_3^2}{A_1}\sqrt{I\delta_1}. \tag{5}$$

Допустим теперь, что $|\xi| \leqslant |\xi'|$. Тогда

$$\frac{|\xi'|}{|\xi|^3} + \frac{|\xi|}{|\xi'|^3} \leqslant \frac{2|\xi'|}{|\xi|^3}.$$

Поэтому

$$|\xi\eta' - \eta\xi'| \leqslant \frac{4|K|\cdot|k|\cdot\sqrt{3I}}{|\xi|^3}|\xi'|$$

и в силу неравенства (5)

$$\frac{12A_3^2}{A_1}\sqrt{I\delta_1} \leqslant \frac{4|K|\cdot|k|\cdot\sqrt{3I}}{|\xi|^3}|\xi'|$$

и отсюда

$$|\xi|^3 \leqslant \frac{2^5\cdot\sqrt{3}\cdot|k||A_1A_4|}{\sqrt{\delta_1}}|\xi'|.$$

Итак, если $|\xi'| \geqslant |\xi|$, то

$$|\xi'| \geqslant \frac{\sqrt{\delta_1}}{2^5\cdot\sqrt{3}\cdot|k|\cdot|A_1A_4|}|\xi|^3.$$

Припоминая, что

$$\frac{|K|\cdot|k|\cdot\sqrt{3I}}{|\xi|^4} = |z|, \qquad \frac{|K|\cdot|k|\cdot\sqrt{3I}}{|\xi'|^4} = |z'|,$$

найдем

$$|z'| \leqslant \frac{2^{10}\cdot 3k^2}{I}|z|^3.$$

Но $27D = 4I^3$, следовательно

$$|z'| < \frac{2^{11}k^2}{\sqrt[3]{D}}|z|^3.$$

§ 7. Гипергеометрический ряд и приближения, им определяемые

Пусть

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2 + \dots$$

известный гипергеометрический ряд. Тогда *

$$(1-z)^\alpha F(-n+\alpha, -m, -m-n, z) - F(-m-\alpha, -n, -m-n, z) =$$
$$= \lambda z^{m+n+1}F(n-\alpha+1, m+1, m+n+2, z),$$

где

$$\lambda = (-1)^m\binom{m+\alpha}{m+n+1} : \binom{m+n}{m}.$$

Пусть $m = n - g$, $g = 0$ или 1. Положим

$$A_g(z) = F(-n+\alpha, -n+g, -2n+g, z),$$
$$B_g(z) = F(-n-\alpha+g, -n, -2n+g, z),$$

и рассмотрим выражение

$$(1-z)^{\frac{1}{4}}A_g(z) - (1-z')^{\frac{1}{4}}B_g(z) = \delta,$$

* См. Siegel, цит. в начале статьи.

где z и z' имеют значения предыдущего параграфа. Имеем

$$\delta = \varepsilon^{-1}\left(\frac{\eta}{\xi} A_g(z) - \frac{\eta'}{\xi'} B_g(z)\right).$$

Тогда δ^4 принадлежит к области $R(\sqrt{-I\delta_1})$, так как $\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^4$, $\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)^4$ и $\frac{\eta'}{\eta}$, $\frac{\xi'}{\xi}$ принадлежат к этой области. Далее можно подобрать такое целое рациональное h, что

$$h\xi'\xi^{4n+1-g}\delta$$

будет целым алгебраическим числом (при этом $h < C_1^n$ и $A_g(z)$ есть многочлен относительно z степени $n-g$, $B_g(z)$ многочлен степени n). Кроме того

$$h^8\xi'^8(\xi^8)^{4n+1-g}\delta^8$$

будет целым алгебраическим числом, принадлежащим к мнимой квадратичной области $R(\sqrt{-I\delta_1})$ (так как ξ'^8 и ξ^8 принадлежит к этой области). Выберем g так, чтобы $\delta \neq 0$ (что возможно, так как $A_0B_1 - B_0A_1 \neq 0$). Тогда $h^8\xi'^8(\xi^8)^{4n+1-g}\delta^8$ есть целое число, принадлежащее к мнимой квадратичной области $R(\sqrt{-I\delta_1})$ и не равное нулю. Следовательно,

$$|h^8\xi'^8(\xi^8)^{4n+1-g}\delta^8| \geqslant 1$$

и

$$|h\xi'\xi^{4n+1-g}\delta| \geqslant 1.$$

Отсюда

$$|\delta| \geqslant \frac{1}{|h\xi'\xi^{4n+1-g}|}$$

и

$$|\delta| \geqslant \frac{|z'|^{\frac{1}{4}}|z|^{n+\frac{1-g}{4}}}{h\,|Kk\sqrt{-3I}|^{n+\frac{2-g}{4}}}.$$

Далее* имеем:

$$|\delta| < C_2\left\{|z|^{2n+1-g} + |z'|\right\},$$

где C_2 — некоторая константа. Отсюда

$$h\,|Kk\sqrt{-3I}|^{n+\frac{2-g}{4}}\delta \geqslant |z'|^{\frac{1}{4}}|z|^{n+\frac{1-g}{4}},$$

$$|z'|^{\frac{1}{4}}|z|^{n+\frac{1-g}{4}} < C_2h\left(|z|^{2n+1-g} + |z'|\right)|Kk\sqrt{-3I}|^{n+\frac{2-g}{4}}.$$

§ 8. О верхнем пределе для $|K|$

Покажем, что среди форм, эквивалентных форме

$$\Phi(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4,$$

* См. Siegel, ibid.

можно найти такую, для которой соответствующее значение $|A_3^2 A_4|$ будет заключено между 0 и $16^4 I^3$. Имеем

$$H(x, y) = \frac{1}{4A_3^2 A_4}(2A_1 A_4 x^2 + A_3^2 xy + 2A_4 A_3 y^2)^2.$$

Допустим, что $\Phi(x, y)$ такова, что $A_3^2 A_4 \neq 0$. Перейдем от формы $\Phi(x, y)$ к форме $\Phi'(x, y) = a_0' x^4 + \ldots$, эквивалентной первой путем подстановки

$$x = m\xi + l\eta, \quad y = p\xi + q\eta, \qquad mq - lp = \pm 1,$$

где m, l, p, q — целые рациональные. Тогда имеем

$$A_4' = H(l, q),$$

$$A_3' = 4ml^3 A_0 + (l^3 p + 3ml^2 q) A_1 + (2l^2 pq + 2mlq^2) A_2 + \\ + (q^3 m + 3pq^2 l) A_3 + 4pq^3 A_4.$$

Известно, что в квадратичной форме

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

где $b^2 - 4ac \neq 0$, всегда можно дать переменным x и y такие целые значения (не равные одновременно нулю), что

$$|ax^2 + bxy + cy^2| < \sqrt{\frac{4}{3}|b^2 - 4ac|}.$$

При этом, если $b^2 - 4ac$ не равняется полному квадрату, т. е. если форма $ax^2 + bxy + cy^2$ неприводима, то одновременно

$$|ax^2 + bxy + cy^2| > 0.$$

Отсюда следует, что можно выбрать l и q целые так, что

$$|A_4'| = \frac{1}{4A_3^2 A_4}(2A_1 A_4 l^2 + A_3^2 lq + 2A_4 A_3 q^2)^2 < \\ < \frac{1}{|4A_3^2 A_4|}\left|\frac{4}{3}(A_3^4 - 16A_1 A_4^2 A_3)\right| = 16I,$$

т. е. что

$$|A_4'| < 16I.$$

При этом мы можем, конечно, предполагать, что l и q взаимно простые. Тогда всегда можно подобрать m и p так, что

$$mq - lp = \pm 1.$$

При этом все значения m и p будут следующими:

$$m = m_0 + lt,$$
$$p = p_0 + qt$$

при произвольном целом t (где m_0, p_0 есть одно какое-либо решение, так что $m_0 q - lp_0 = \pm 1$). Тогда

$$A_3' = (m_0 + lt)(4l^3 A_0 + 3l^2 q A_1 + 2lq^2 A_2 + q^3 A_3) + \\ + (p_0 + qt)(l^3 A_1 + 2l^2 q A_2 + 3lq^2 A_3 + 4q^3 A_4) = M + 4tA_4',$$

где M — некоторое целое число, а t может пробегать все целые значения, $|A_4'| < 16I$. Ясно, что можно t выбрать так, что

$$|A_3'| = |M + 4tA_4'| < |4A_4'| < 4 \cdot 16I,$$

а следовательно, при таком выборе l, m, p, q, будет

$$|A_3'^2 A_4'| < 16^4 I^3.$$

Примечание 1. Если $b^2 - 4ac = d^2$ (т. е. полный квадрат), то можно найти такие целые $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, что

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y).$$

Тогда, если положить

$$x = \delta - \beta; \quad y = \alpha - \gamma,$$

то

$$|ax^2 + bxy + cy^2| = |\alpha\delta - \beta\gamma|^2 = |b^2 - 4ac|$$

(при этом x и y не равны нулю одновременно, так как иначе $b^2 - 4ac = 0$).

Следовательно, если $A_3^2 A_4 \neq 0$, то l и q могут быть подобраны так, что

$$0 < |A_4'| \leqslant 16|I|.$$

После такого выбора l и q, а следовательно, и A_4', можно подобрать t так, что

$$0 < |A_3'| = |M + 4tA_4'| \leqslant |4A_4'|.$$

Итак, если $A_3^2 A_4 \neq 0$, то среди форм, эквивалентных данной, найдется такая, у которой

$$0 < |A_3'^2 A_4'| \leqslant 16^4 I^3.$$

Примечание 2. Если же $A_3^2 A_4 = 0$, то всегда можно от исходной формы перейти к эквивалентной ей такой, что $A_3^2 A_4 \neq 0$.

§ 9. Верхний предел числа решений

Итак, теперь мы можем написать:

$$|z'|^{\frac{1}{4}} |z|^{n+\frac{1-g}{4}} < C_3^n (|z|^{2n+1-g} + |z'|) (kI^{\frac{7}{2}})^{n+\frac{2-g}{4}}.$$

Положим $|z'| = |z|^\nu$. Тогда

$$C_3^n |k\sqrt{I^7}|^{n+\frac{2-g}{4}} \left(|z|^{n-\frac{\nu}{4}+\frac{3}{4}(1-g)} + |z|^{\frac{3}{4}\nu - n - \frac{1-g}{4}}\right) > 1.$$

Допустим, что мы имеем по крайней мере шесть различных решений, принадлежащих к одному и тому же ε, и пусть соответствующие значения z будут

$$2 \geqslant |z_0| > |z_1| > |z_2| > \ldots > |z_5|.$$

Положим

$$z = z_3 \quad \text{и} \quad z' = z_5.$$

Имеем: если $|z'| < |z|$, то

$$|z'| < \frac{2^{11} k^2}{\sqrt[3]{D}} |z|^3.$$

Следовательно,

$$|z_1| < \frac{2^{11} k^2 |z_0|^3}{\sqrt{\frac{4I^3}{27}}} = \frac{C_4 k^2}{I} |z_0|^3.$$

Иначе:

$$|z_1| < 8 \frac{C_4 k^2}{I}$$

Следовательно, если взять $I > 8C_4 k^2$, то $|z_1| < 1$, а следовательно, и $|z_2| < 1, \ldots, |z_5| < 1$. Так как $|z_5| = |z_3|^\nu$, то $\nu \geqslant 9$. Если взять $n = \left[\frac{\nu + g}{2}\right]$, то будет:

$$n - \frac{\nu}{4} + \frac{3}{4}(1 - g) \geqslant \frac{\nu}{4} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{4}\nu - n - \frac{1 - g}{4} \geqslant \frac{\nu}{4} - \frac{1}{2},$$

$$n + \frac{2 - g}{4} \leqslant \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}.$$

Следовательно,

$$|z|^{n - \frac{\nu}{4} + \frac{3}{4}(1-g)} \leqslant |z|^{\frac{\nu}{4} - \frac{1}{2}},$$

$$|z|^{\frac{3}{4}\nu - n - \frac{1-g}{4}} \leqslant |z|^{\frac{\nu}{4} - \frac{1}{2}},$$

$$|k\sqrt{I^7}|^{n + \frac{2-g}{4}} \leqslant |k\sqrt{I^7}|^{\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}}$$

Отсюда

$$2C_3^{\left[\frac{\nu+g}{2}\right]} |k\sqrt{I^7}|^{\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}} |z|^{\frac{\nu}{4} - \frac{1}{2}} > 1.$$

Следовательно,

$$2^{\frac{1}{\nu}} C_3^{\left[\frac{\nu+g}{2}\right]\frac{1}{\nu}} |k\sqrt{I^7}|^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4\nu}} |z|^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\nu}} > 1,$$

$$C_5 |k\sqrt{I^7}|^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4\nu}} |z|^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\nu}} > 1$$

Так как $z = z_3$, то

$$|z_3| < \left(\frac{C_4 k^2}{I}\right)^{13} \cdot 2^{27}.$$

Отсюда

$$C_6 |k\sqrt{I^7}|^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4\nu}} \left(\frac{k^2}{I}\right)^{13\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\nu}\right)} > 1.$$

Иначе

$$C_6 k^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4\nu} + 26\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\nu}\right)} I^{\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4\nu}\right) - 13\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\nu}\right)} > 1.$$

Но

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4\nu}+26\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\nu}\right)<7,$$

$$\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4\nu}\right)-13\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\nu}\right)<-\frac{35}{72}.$$

Следовательно,

$$C_6k^7I^{-\frac{35}{72}}>1.$$

Отсюда

$$I<C_8k^{\frac{72}{5}},$$

что невозможно при достаточно большом D.

Итак, число решений (принадлежащих к определенному корню) не может быть больше 5 при достаточно больших D и общее число решений в случае четырех вещественных корней при достаточно больших D не превосходит двадцати.

Автодорожный институт им. Куйбышева.
Ленинград.

Поступило
16. II. 1939.

V. KRECHMAR. ON THE SUPERIOR BOUND OF THE NUMBER OF REPRESENTATIONS OF AN INTEGER BY BINARY FORMS OF THE FOURTH DEGREE

SUMMARY

In the present paper we prove by a method due to Siegel that the number of representations of 1 by the form

$$a_0x^4+a_1x^3y+a_2x^2y^2+a_3xy^3+a_4y^4$$

does not exceed 20, if the cubic invariant of the form vanishes, i. e., if

$$J=2a_2^3-9a_1a_2a_3+27a_1^2a_4-72a_0a_2a_4+27a_0a_3^2=0.$$

This estimation of the number of representations seems to be not the best possible.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L URSS
Серия математическая Série mathématique

Б. И. СЕГАЛ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ СУММАМИ СТЕПЕНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе рассматривается приближенное представление комплексных чисел в виде суммы комплексных степеней значений заданного многочлена с действительными коэффициентами. При этом предполагается, что аргумент многочлена принимает лишь целые положительные значения.

§ 1. В моих работах ([1, 2]) я рассматривал задачу приближенного представления комплексных чисел суммами степеней целых чисел с заданным комплексным показателем. В связи с этой задачей возникает вопрос о возможности такого представления, если за основания степеней брать не целые числа, а члены некоторой последовательности. В настоящей работе я показываю, что вместо последовательности целых чисел можно брать последовательность значений действительного многочлена, аргумент которого пробегает значения всех натуральных чисел, не превосходящих некоторое число.

Пусть $a+bi$ данное комплексное число, причем $a>0$, $b\neq 0$; $\varphi(x)=\gamma x^m+\gamma_1 x^{m-1}+\ldots+\gamma_m$, где $m>\frac{1}{a}$, $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — действительные числа, $\gamma>0$, x принимает целые значения. Мы будем рассматривать представление любого комплексного числа $N=N_1+N_2 i$ в форме

$$N_1+N_2 i=h_1+h_2 i+\sum_{\lambda=1}^{r}(\varphi(x_\lambda))^{a+bi}, \qquad (1)$$

где h_1 и h_2 заключены в определенных границах.

§ 2. Для сокращения изложения мы будем базироваться на нашей работе ([2]). Но мы заменяем лемму 1, изложенную в § 2 этой работы, другой леммой, так как в связи с такой заменой мы будем иметь возможность воспользоваться одним новым и весьма точным результатом И. М. Виноградова, относящимся к оценке тригонометрических сумм.

ЛЕММА. *Пусть k целое $\geqslant 3$; $U=B-A>0$, p и q положительны и зависят только от k; $f(x)$ действительная функция, имеющая, в про-*

межутке $A \leqslant x \leqslant B$, $k+1$ *производных. Если в этом промежутке* $f^{(k)}(x)$ *знакопостоянна и*

$$p^{-1}V^{-1} \leqslant |f^{(k)}(x)| \leqslant pV^{-1}, \quad |f^{(k+1)}(x)| \leqslant \frac{h}{VU},$$

где V *положительно и не зависит от* x, *тогда можно выбрать* $\rho_k > 0$, *зависящее только от* k, *так, что*

$$\left|\sum_{A \leqslant x \leqslant B} e^{2\pi i f(x)}\right| < C(UV^{-\rho_k} + \sqrt{V}),$$

где C *положительно и зависит только от* k.

Из теоремы 4 работы J. G. van der Corput'a (³) или из аналогичной теоремы того же автора, доказанной в работе (⁴), мы легко находим для ρ_k значение

$$\rho_k = 2^{-k}. \tag{2}$$

Для значений $k \geqslant 14$ мы из теоремы 2 работы И. М. Виноградова (⁵) выводим для ρ_k гораздо более точное значение

$$\rho_k = (2(k+1)^3 \log 2(k+1))^{-1}. \tag{3}$$

§ 3. Ниже мы будем пользоваться еще следующими обозначениями:

$$n = [ma] + 2, \quad a' = n - ma - 1; \tag{4}$$

r — целое число $\geqslant r_0$, где

$$r_0 = \left[\frac{2n}{\rho_n}\right] + 1 = \frac{2n}{\rho_n} + \varepsilon', \quad 0 < \varepsilon' \leqslant 1; \tag{5}$$

далее,

$$X = \gamma^{-\frac{1}{m}} |N|^{\frac{1}{ma}}, \quad \alpha = \frac{a'\varepsilon'}{r_0}, \quad \Delta_1 = X^{-\alpha}. \tag{6}$$

Пользуясь этими обозначениями, мы можем основной результат настоящей работы формулировать в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА. *Для числа* I_N *представлений* N *в форме* (1), *где целые числа* $x_1, \ldots, x_r$ *удовлетворяют условиям*

$$0 < x_\lambda < X \quad (\lambda = 1, \ldots, r),$$

а h_1 *и* h_2 *удовлетворяют условиям*

$$-\Delta_1 \leqslant h_1 \leqslant \Delta_1, \quad -\Delta_1 \leqslant h_2 \leqslant \Delta_1,$$

мы имеем асимптотическую формулу

$$I_N = LX^{r-2ma-2\alpha}(1 + O(X^{-\alpha})),$$

где L *превосходит положительное постоянное число, зависящее только от* a, b, m, γ *и* r.

Заметим, что, пользуясь значениями (2) и (3) для ρ_k, мы получаем из (4) и (5) для r_0 следующие значения:

$$r_0 = n^{n+1} + 1, \quad \text{если } 1 < ma < 12,$$

$$r_0 = [4n(n+1)^3 \log 2(n+1)] + 1, \quad \text{если } ma \geqslant 12.$$

§ 4. Приступая к доказательству теоремы, введем вспомогательные числа $M = M_1 + M_2 i$, которые определяются следующим образом:

$$M_1 = N_1 \pm 2\lambda\Delta_1 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$M_2 = N_2 \pm 2\mu\Delta_1 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$N_1 - X^{ma-\eta} < M_1 < N_1 + X^{ma-\eta},$$
$$N_2 - \sqrt{X^{2ma-2\eta} - (N_1 - M_1)^2} < M_2 < N_2 + \sqrt{X^{2ma-2\eta} - (N_1 - M_1)^2},$$
$$\eta = a'\varepsilon'\left(\frac{1}{r_0} + \frac{3}{r_0 r_0'}\right), \quad r_0' = \begin{cases} \frac{r_0}{ma} - 4, & \text{если } ma \geqslant 2 \\ \frac{r_0}{2} - 4, & \text{если } 1 < ma < 2. \end{cases}$$

Легко видеть, что числа M лежат внутри круга радиуса $X^{ma-\eta}$ с центром в точке N. Поэтому для числа Λ чисел M мы без труда находим

$$\Lambda = \frac{\pi X^{2ma-2\eta}}{4\Delta_1^2} + O\left(\frac{X^{ma-\eta}}{\Delta_1^2}\right). \tag{7}$$

Пользуясь рассуждениями, изложенными в § 6 нашей работы (²), мы получаем для числа представлений I_M каждого M в форме (1) следующее соотношение:

$$I_M + R = E \int_0^\infty \int_0^\infty TS^r e(-z_1 M_1)\, e(-z_2 M_2)\, dz_1 dz_2, \tag{8}$$

$$S = \sum_{0<x<X} e\left(y^a (z_1 \cos(b \log y) + z_2 \sin(b \log y))\right). \tag{9}$$

Здесь мы пользуемся следующими обозначениями:

$$E = 2^{-2s+2}\pi^{-2s-2},$$
$$T = \frac{\sin(2\pi\Delta z_1)\sin(2\pi\Delta z_2)\sin^s(2\pi\delta z_1)\sin^s(2\pi\delta z_2)}{\delta^{2s} z_1^{s+1} z_2^{s+1}},$$
$$y = \varphi(x), \quad e(\xi) = e^{2\pi i \xi}, \quad \delta = X^{-\beta}, \quad \beta = 2a'\varepsilon'\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0 r_0'}\right),$$

s целое число, зависящее только от a, m и r и $\Delta = \Delta_1 + s\delta$.

Введем числа

$$X_0 = X^{-ma+\varepsilon_1}, \quad X_1 = gX^{-ma+1}, \quad X_k = X^{-ma+k-\varepsilon_k} \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{a'\varepsilon'}{r_0 r_0'}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2(4+a)}{r_0 + 4}, \quad \varepsilon_k = \frac{2k + a}{r_0 \rho_k + 2} \quad (k = 3, \ldots, n-1),$$
$$\varepsilon_n = 2\frac{a + 2a}{r_0 \rho_n}, \quad g = g(a, b, m, \gamma) > 0$$

и, обозначив

$$\Phi(z_1, z_2) = ETS^r e(-z_1 M_1)\, e(-z_2 M_2)\, dz_1 dz_2,$$

разобьем интеграл правой части (8) на следующие:

$$H_M = \int\limits_0^{X_0} \int\limits_0^{X_0} \Phi(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2,$$

$$\left.\begin{aligned} H_k' &= \int\limits_{X_{k-1}}^{X_k} \int\limits_0^{X_{k-1}} \Phi(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2, \\ H_k'' &= \int\limits_0^{X_{k-1}} \int\limits_{X_{k-1}}^{X_k} \Phi(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2, \\ H_k''' &= \int\limits_{X_{k-1}}^{X_k} \int\limits_{X_{k-1}}^{X_k} \Phi(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2, \end{aligned}\right\} (k=1, \ldots, n)$$

$$H_{n+1}' = \int\limits_{X_n}^{\infty} \int\limits_0^{X_n} \Phi(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2,$$

$$H_{n+1}'' = \int\limits_0^{X_n} \int\limits_{X_n}^{\infty} \Phi(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2,$$

$$H_{n+1}''' = \int\limits_{X_n}^{\infty} \int\limits_{X_n}^{\infty} \Phi(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2.$$

Если положим еще

$$H_k = |H_k'| + |H_k''| + |H_k'''| \quad (k=1, \ldots, n+1),$$

то из (8) находим

$$|I_M - H_M| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} H_k + |R|. \tag{10}$$

§ 5. В дальнейшем нам необходимо будет заниматься оценкой интегралов правой части (10). Для этой цели мы будем оценивать для определенных значений z_1 и z_2 сумму S. Оценка этой суммы сводится к оценке суммы

$$\sum_{q^{-1}P+1 \leqslant x \leqslant P} e(y^a (z_1 \cos(b \log y) + z_2 \sin(b \log y))),$$

где P — положительное число, могущее принимать сколь угодно большие значения, а q не зависит от P и > 1.

Проведение оценки такой суммы связано с изучением в промежутке

$$q^{-1}P + 1 \leqslant x \leqslant P \tag{11}$$

производных функции

$$f(x) = y^a (z_1 \cos(b \log y) + z_2 \sin(b \log y)), \tag{12}$$

где попрежнему

$$y = \varphi(x) = \gamma x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \ldots + \gamma_m$$

означает данный многочлен. Поэтому мы сейчас займемся нахождением общего выражения производной $f(x)$ порядка k для указанного промежутка.

Имеем

$$f(x) = zy^a \sin(\psi + b \log y),$$

где

$$z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \psi = \arg(z_2 + z_1 i).$$

Поэтому легко находим

$$f'(x) = A_1 z y^{a-1} y' \sin(\psi_1 + b \log y), \tag{13}$$

где

$$A_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \psi_1 = \arg(z_2 + z_1 i) + \arg(a + bi).$$

Далее имеем

$$f''(x) = A_1 z (b y^{a-2} y'^2 \cos(\psi_1 + b \log y) + (a-1) y^{a-2} y'^2 \sin(\psi_1 + b \log y) + \\ + y^{a-1} y'' \sin(\psi_1 + b \log y)),$$

или

$$f''(x) = zy^{a-2}(G_2(x) \cos(\psi_1 + b \log y) + K_2(x) \sin(\psi_1 + b \log y)), \tag{14}$$

где $G_2(x)$ и $K_2(x)$ — многочлены степени $2m-2$. Обозначим старшие коэффициенты этих многочленов соответственно через g_2 и k_2; тогда

$$g_2 = A_1 b \gamma^2 m^2 \neq 0$$

и в промежутке (11) имеем

$$f''(x) = zx^{ma-2}(A_2' \cos(\psi_1 + b \log y) + A_2'' \sin(\psi_1 + b \log y)) + O(zP^{ma-3}),$$

где A_2' и A_2'' — действительные числа, зависящие только от a, b, m и γ, причем $A_2' \neq 0$. Следовательно,

$$f''(x) = A_2 z x^{ma-2} \sin(\psi_2 + b \log y) + O(zP^{ma-3}), \tag{15}$$

где

$$A_2 = \sqrt{A_2'^2 + A_2''^2}, \quad \psi_2 = \psi_1 + \arg(A_2'' + A_2' i).$$

Третью производную находим дифференцированием равенства (14) и получаем

$$f'''(x) = zy^{a-3}(((a-2) G_2(x) y' + G_2'(x) y + bK_2(x) y') \cos(\psi_1 + b \log y) + \\ + ((a-2) K_2(x) y' - bG_2(x) y' + K_2'(x) y) \sin(\psi_1 + b \log y)),$$

или

$$f'''(x) = zy^{a-3}(G_3(x) \cos(\psi_1 + b \log y) + K_3(x) \sin(\psi_1 + b \log y)),$$

где $G_3(x)$ и $K_3(x)$ — многочлены степени $3m-3$. Для старших коэффициентов этих многочленов g_3 и k_3 имеем

$$g_3 = (a-2) m\gamma g_2 + (2m-2) \gamma g_2 + bm\gamma k_2,$$
$$k_3 = (a-2) m\gamma k_2 - bm\gamma g_2 + (2m-2) \gamma k_2,$$

или

$$g_3 = ((am-2) g_2 + bmk_2) \gamma,$$
$$k_3 = (-bmg_2 + (am-2) k_2) \gamma.$$

Но так как $\gamma \neq 0$, g_2 и k_2 одновременно не равны нулю ($g_2 \neq 0$) и

$$(am-2)^2+b^2m^2 \neq 0,$$

то g_3 и k_3 одновременно не могут быть равны нулю. Поэтому в промежутке (11) имеем

$$f'''(x)=zx^{ma-3}(A_3'\cos(\psi_1+b\log y)+A_3''\sin(\psi_1+b\log y))+O(zP^{ma-4}),$$

где A_3' и A_3'' одновременно не равны нулю и зависят только от a, b, m и γ. Итак,

$$f'''(x)=A_3zx^{ma-3}\sin(\psi_3+b\log y)+O(zP^{ma-4}),$$

где

$$A_3=\sqrt{A_3'^2+A_3''^2},\quad \psi_3=\psi_1+\arg(A_3''+A_3'i).$$

Путем повторного применения аналогичных рассуждений мы получаем для любого целого k в промежутке (11)

$$f^{(k)}(x)=A_kzx^{ma-k}\sin(\psi_k+b\log y)+O(zP^{ma-k-1}), \tag{16}$$

где A_k зависит только от a, b, m и γ и не равно нулю, а ψ_k не зависит от x.

§ 6. Переходим к оценке интегралов правой части (10). Для оценки H_1 мы будем пользоваться леммой 2, приведенной в § 5 нашей работы (2). Из (9) и (12) находим

$$S \leqslant \left|\sum_{1\leqslant x\leqslant Z} e(f(x))\right| + \sum_{\lambda=1}^{p}|S_\lambda|, \tag{17}$$

где

$$S_\lambda=\sum_{q^{\lambda-1}Z+1\leqslant x\leqslant q^\lambda Z} e(f(x)),\quad q=e^{\frac{\pi}{(m+1)|b|}};\quad p=\left[\log_q\frac{X}{Z}\right]+1,$$

$$\left.\begin{aligned} Z&=z^{-\frac{1}{ma}} \text{ при } ma\geqslant 2,\\ Z&=z^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{2-ma}{2}} \text{ при } ma<2.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Легко проверить, что $b\log y$ в каждой сумме S_λ при достаточно больших значениях Z увеличивается или уменьшается менее чем на π. Кроме того ψ_1 не зависит от x. Поэтому, при достаточно больших значениях Z, производная $f'(x)$, выражение которой дается равенством (13), в каждой сумме S_λ меняет знак не более одного раза. Соответственно этому вводим число q_1, удовлетворяющее условию

$$\psi_1+b\log\varphi(q^{\lambda-1}q_1Z)=l\pi\quad (l \text{ — целое}),\quad 1<q_1<q$$

и находим

$$S_\lambda=S_\lambda'+S_\lambda'', \tag{19}$$

где

$$S_\lambda'=\sum_{q^{\lambda-1}Z+1\leqslant x\leqslant q^{\lambda-1}q_1Z} e(f(x)),\quad S_\lambda''=\sum_{q^{\lambda-1}q_1Z+1\leqslant x\leqslant q^\lambda Z} e(f(x)).$$

Займемся сперва оценкой S'_λ. Имеем

$$S'_\lambda = \sum_{q^{\lambda-1}Z+1\leqslant x\leqslant q^{\lambda-1}q'_1Z} e(f(x)) + \sum_{q^{\lambda-1}q'_1Z+1\leqslant x\leqslant q^{\lambda-1}q_1Z} e(f(x)), \tag{20}$$

где

$$q'_1 = q_1 - \frac{1}{\sqrt{z(q^\lambda Z)^{ma}}}.$$

Для второй из этих сумм применяем очевидную оценку и находим

$$\left|\sum_{q^{\lambda-1}q'_1Z+1\leqslant x\leqslant q^{\lambda-1}q_1Z} e(f(x))\right| \leqslant q^\lambda Z(q_1-q'_1) = z^{-\frac{1}{2}}(q^\lambda Z)^{-\frac{ma}{2}+1} \tag{21}$$

Для первой из сумм правой части (20) выражение $\psi_1 + b\log y$ отличается от $l\pi$ не меньше чем на величину, имеющую точный порядок

$$\frac{1}{\sqrt{z(q^\lambda Z)^{ma}}}.$$

В самом деле,

$$b\log\varphi(q^{\lambda-1}q_1Z) - b\log\varphi(q^{\lambda-1}q'_1Z) =$$
$$= b\log\gamma + bm\log q^{\lambda-1}q_1Z + O(q^{-\lambda}Z^{-1}) - b\log\gamma -$$
$$- bm\log q^{\lambda-1}q'_1Z + O(q^{-\lambda}Z^{-1}) = bm\log\left(1+\frac{1}{q'_1\sqrt{z(q^\lambda Z)^{ma}}}\right) +$$
$$+ O(q^{-\lambda}Z^{-1}) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{z(q^\lambda Z)^{ma}}}\right),$$

где $Q(B)$ при положительном B означает величину, имеющую точный порядок B, т. е.

$$p^{-1}B \leqslant Q(B) \leqslant pB,$$

и p не зависит от B.

Воспользовавшись только что доказанным, мы можем легко убедиться в том, что для первой из сумм правой части (20)

$$|f'(x)| > Q\left(z(q^\lambda Z)^{ma-1}\frac{1}{\sqrt{z(q^\lambda Z)^{ma}}}\right),$$

или

$$|f'(x)| > Q\left(z^{\frac{1}{2}}(q^\lambda Z)^{\frac{ma}{2}-1}\right).$$

Путем надлежащего выбора величины g мы можем также достигнуть того, чтобы для интегралов, входящих в H_1, было

$$|f'(x)| < \frac{1}{2}.$$

При этом $f'(x)$ для рассматриваемой суммы не меняет знака. Вторая производная $f''(x)$, выражение которой дается формулой (15), меняет

знак не более одного раза. Поэтому мы можем для оценки первой из сумм правой части (20) применить упомянутую лемму * и находим

$$\sum_{q^{\lambda-1}Z+1\leqslant x\leqslant q^{\lambda-1}q_1'Z} e(f(x)) \ll z^{-\frac{1}{2}}(q\ Z)^{-\frac{ma}{2}+1}. \tag{22}$$

Из (20), (21) и (22) получаем

$$S_\lambda' \ll z^{-\frac{1}{2}}(q^\lambda Z)^{-\frac{ma}{2}+1}.$$

Аналогичную оценку получаем для S_λ'' и из (19) находим

$$S_\lambda \ll z^{-\frac{1}{2}}(q^\lambda Z)^{-\frac{ma}{2}+1}.$$

Воспользовавшись этой оценкой, мы получаем из (17)

$$S \ll Z + z^{-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=1}^{p} (q^\lambda Z)^{-\frac{ma}{2}+1}. \tag{23}$$

Если $ma \geqslant 2$, то отсюда находим

$$S \ll Z + z^{-\frac{1}{2}} Z^{-\frac{ma}{2}+1}$$

или, подставив первое значение Z из (18),

$$S \ll z^{-\frac{1}{ma}}. \tag{24}$$

Если $ma < 2$, то из (23) получаем

$$S \ll Z + z^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{ma}{2}+1},$$

или, подставив второе значение Z из (18),

$$S \ll z^{-\frac{1}{2}} X^{\frac{2-ma}{2}}. \tag{25}$$

Воспользовавшись оценками (24) и (25) для S, можно найти оценку для H_1, если провести вычисления, указанные в § 9 моей работы ([2]). Получаем

$$H_1 \ll X^{r-2ma-3a}. \tag{26}$$

§ 7. Переходим теперь к рассмотрению интегралов, входящих в H_2. Здесь мы будем пользоваться леммой 3, приведенной в § 5 нашей работы ([2]). Для суммы S мы попрежнему имеем

$$\left.\begin{aligned} S &\leqslant \Big|\sum_{1\leqslant x\leqslant Z} e(f(x))\Big| + \sum_{\lambda=1}^{p} |S_\lambda|, \\ S_\lambda &= \sum_{q^{\lambda-1}Z+1\leqslant x\leqslant q^\lambda Z} e(f(x)), \quad q = e^{\frac{\pi}{(m+1)|b|}}, \quad p = \left[\log_q \frac{X}{Z}\right]+1, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

* Если $f''(x)$ не меняет знака, то мы применяем лемму непосредственно; если же $f''(x)$ меняет один раз знак, то мы разбиваем сумму на две суммы и применяем лемму к каждой из них в отдельности.

причем здесь мы полагаем

$$Z=\begin{cases} z^{-\frac{1}{ma}}, & \text{если } ma \geqslant 3, \\ z^{-\frac{1}{3}} X^{\frac{3-ma}{3}}, & \text{если } ma < 3. \end{cases} \tag{28}$$

Пользуясь формулой (15), мы легко выводим, что в каждой сумме S_λ имеем

$$f''(x) = A_2 z x^{ma-2} \sin(\psi_2 + b \log y) + O(z(q^\lambda Z)^{ma-3}).$$

Здесь ψ_2 не зависит от x и $b \log y$ увеличивается или уменьшается менее чем на π. Поэтому число q_1, удовлетворяющее условиям

$$\psi_2 + b \log \varphi(q^{\lambda-1} q_1 Z) = l\pi, \quad l \text{ — целое}, \quad 1 < q_1 < q,$$

определяется однозначно. Разобьем сумму S_λ на две:

$$S_\lambda = S'_\lambda + S''_\lambda, \tag{29}$$

$$S'_\lambda = \sum_{q^{\lambda-1}Z+1 \leqslant x \leqslant q^{\lambda-1} q_1 Z} e(f(x)),$$

$$S''_\lambda = \sum_{q^{\lambda-1} q_1 Z+1 \leqslant x \leqslant q^\lambda Z} e(f(x)).$$

В каждой из сумм S'_λ и S''_λ вторая производная не меняет знака Рассмотрим сумму S'_λ. Имеем

$$S'_\lambda \leqslant \sum_{\nu=1}^{p_1} |S_{\lambda,\nu}| + \left| \sum_{q^{\lambda-1} q_1 Z - Y + 1 \leqslant x \leqslant q^{\lambda-1} q_1 Z} e(f(x)) \right|, \tag{30}$$

где суммирование в

$$S_{\lambda,\nu} = \sum_x e(f(x)) \tag{31}$$

распространяется на все x, для которых

$$q^{\lambda-1} q_1 Z - q_1^{p_1-\nu+1} Y + 1 \leqslant x \leqslant q^{\lambda-1} q_1 Z - q_1^{p_1-\nu} Y$$

и

$$p_1 = \left[\log_{q_1} (q_1 - 1) q^{\lambda-1} \frac{Z}{Y} \right] + 1,$$

$$Y = z^{-\frac{1}{3}} (q^\lambda Z)^{-\frac{ma-3}{3}}. \tag{32}$$

Легко проверить, что в сумме $S_{\lambda,\nu}$ величина $\psi_2 + b \log y$ отличается от $l\pi$ (l — целое) на величину, имеющую точный порядок,

$$\frac{q_1^{p_1-\nu} Y}{q^\lambda Z}.$$

В самом деле, величина $\psi_2 + b\log y$ при значении x, равном верхнему пределу суммы $S_{\lambda,\nu}$, отличается от $k\pi$ на величину

$$\psi_2 + b\log\varphi(q^{\lambda-1}q_1Z - q_1^{p_1-\nu}Y) - \psi_2 - b\log\varphi(q^{\lambda-1}q_1Z) =$$
$$= b\log\gamma + bm\log(q^{\lambda-1}q_1Z - q_1^{p_1-\nu}Y) + O((q^{\lambda-1}q_1Z - q_1^{p_1-\nu}Y)^{-1}) -$$
$$- b\log\gamma - bm\log(q^{\lambda-1}q_1Z) + O((q^{\lambda-1}q_1Z)^{-1}) =$$
$$= bm\log\left(1 - \frac{q_1^{p_1-\nu}Y}{q^{\lambda-1}q_1Z}\right) + O((q^{\lambda-1}q_1Z - q_1^{p_1-\nu}Y)^{-1}) = Q\left(\frac{q_1^{p_1-\nu}Y}{q^{\lambda}Z}\right).$$

Аналогично можно проверить и для нижнего предела суммы $S_{\lambda,\nu}$. Поэтому для $S_{\lambda,\nu}$ имеем

$$\sin(\psi_2 + b\log y) = Q\left(\frac{q_1^{p_1-\nu}Y}{q^{\lambda}Z}\right)$$

и

$$f''(x) = Q\left(z(q^{\lambda}Z)^{ma-2}\frac{q_1^{p_1-\nu}Y}{q^{\lambda}Z}\right) + O(z(q^{\lambda}Z)^{ma-3}) =$$
$$= Q(z(q^{\lambda}Z)^{ma-3}q_1^{p_1-\nu}Y).$$

Полагая

$$U = q_1^{p_1-\nu}Y, \quad V = (z(q^{\lambda}Z)^{ma-3}q_1^{p_1-\nu}Y)^{-1},$$

мы получаем применением леммы

$$S_{\lambda,\nu} \ll q_1^{\frac{3}{2}(p_1-\nu)}Y^{\frac{3}{2}}z^{\frac{1}{2}}(q^{\lambda}Z)^{\frac{ma-3}{2}} + (z(q^{\lambda}Z)^{ma-3}q_1^{p_1-\nu}Y)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{\nu=1}^{p_1} S_{\lambda,\nu} \ll z^{\frac{1}{2}}(q^{\lambda}Z)^{\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}(q^{\lambda}Z)^{-\frac{ma-3}{2}}Y^{-\frac{1}{2}},$$

следовательно, из (30) получаем

$$S'_{\lambda} \ll z^{\frac{1}{2}}(q^{\lambda}Z)^{\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}(q^{\lambda}Z)^{-\frac{ma-3}{2}}Y^{-\frac{1}{2}} + Y.$$

Подставляя сюда значение Y из (32), находим

$$S'_{\lambda} \ll z^{\frac{1}{2}}(q^{\lambda}Z)^{\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{3}}(q^{\lambda}Z)^{-\frac{ma-3}{3}}.$$

Аналогичную оценку можно получить для S''_{λ}. Поэтому из (29) получаем

$$S_{\lambda} \ll z^{\frac{1}{2}}(q^{\lambda}Z)^{\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{3}}(q^{\lambda}Z)^{-\frac{ma-3}{3}}.$$

Суммируя по всем значениям λ, мы находим

$$\sum_{\lambda=1}^{p} S_{\lambda} \ll z^{\frac{1}{2}}Z^{\frac{ma}{2}}\sum_{\lambda=1}^{p} q^{\lambda\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{3}}Z^{-\frac{ma-3}{3}}\sum_{\lambda=1}^{p} q^{-\lambda\frac{ma-3}{3}}. \tag{33}$$

Если $ma \geqslant 3$ мы получаем отсюда

$$\sum_{\lambda=1}^{p} S_\lambda \ll z^{\frac{1}{2}} X^{\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{3}} Z^{-\frac{ma-3}{3}}$$

Воспользовавшись этой оценкой, мы находим из (27)

$$S \ll Z + z^{\frac{1}{2}} X^{\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{3}} Z^{-\frac{ma-3}{3}},$$

или, подставляя значение Z из (28), получаем

$$S \ll z^{\frac{1}{2}} X^{\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{ma}}. \tag{34}$$

Если $ma < 3$, то из (33) получаем

$$\sum_{\lambda=1}^{p} S_\lambda \ll z^{\frac{1}{2}} X^{\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{3}} X^{\frac{3-ma}{3}}.$$

Если воспользоваться этой оценкой и учесть второе значение Z из (28), то находим из (27)

$$S \ll z^{\frac{1}{2}} X^{\frac{ma}{2}} + z^{-\frac{1}{3}} X^{\frac{3-ma}{3}}. \tag{35}$$

Получив оценки (34) и (35) для S, мы можем найти оценку для H_2, если провести вычисления, аналогичные изложенным в §§ 10 и 11 нашей работы (²). Имеем

$$H_2 \ll X^{r-2ma-3a}. \tag{36}$$

§ 8. При оценке интегралов, входящих в H_k ($k = 3, 4, \ldots, n$), мы будем пользоваться леммой, изложенной в § 2 настоящей работы. Пользуясь рассуждениями, аналогичными изложенным в предыдущем параграфе, и учитывая значение (16) для производной порядка k функции $f(x)$, мы без труда выводим, что оценка суммы S сводится к оценке суммы $S_{\lambda,\nu}$, определенной равенством (31). Как и в предыдущем параграфе, мы находим, что в сумме $S_{\lambda,\nu}$ величина $\psi_k + b\log y$ отличается от $l\pi$ (l — целое) на величину, имеющую точный порядок

$$\frac{q_1^{p_1-\nu} Y}{q^\lambda Z},$$

причем здесь мы для Z и Y вместо значений (28) и (32) полагаем

$$Z = \begin{cases} z^{-\frac{1}{ma-k+2}}, & \text{если } ma \geqslant k+1, \\ z^{-\frac{1}{3}} X^{\frac{k+1-ma}{3}}, & \text{если } ma < k+1, \end{cases} \tag{37}$$

$$Y = z^{-\frac{1}{3}} (q^\lambda Z)^{-\frac{1}{3}(ma-k-1)}. \tag{38}$$

Таким образом для $S_{\lambda,\nu}$ имеем

$$\sin(\psi_k + b\log y) = Q\left(\frac{q_1^{p_1-\nu}Y}{q^\lambda Z}\right)$$

и по формуле (16)

$$f^{(k)}(x) = Q\left(z(q^\lambda Z)^{ma-k}\,\frac{q_1^{p_1-\nu}Y}{q^\lambda Z}\right) + O\left(z(q^\lambda Z)^{ma-k-1}\right) =$$
$$= Q\left(z(q^\lambda Z)^{ma-k-1} q_1^{p_1-\nu}Y\right).$$

Полагая

$$U = q_1^{p_1-\nu}Y, \quad V = \left(z(q^\lambda Z)^{ma-k-1} q_1^{p_1-\nu}Y\right)^{-1},$$

мы находим из (16), что в $S_{\lambda,\nu}$

$$f^{(k+1)}(x) \ll z(q^\lambda Z)^{ma-k-1} = \frac{1}{VU}$$

и условия леммы § 2 выполнены. Поэтому

$$S_{\lambda,\nu} \ll q_1^{p_1-\nu}Y\left(z(q^\lambda Z)^{ma-k-1} q_1^{p_1-\nu}Y\right)^{\rho_k} + \left(z(q^\lambda Z)^{ma-k-1} q_1^{p_1-\nu}Y\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Пользуясь этой оценкой для $S_{\lambda,\nu}$ и значениями (37) и (38) для Z и Y, мы таким же путем, как и в § 7, находим для S следующие оценки:

$$S \ll z^{\rho_k} X^{1+(ma-k)\rho_k} + z^{-\frac{1}{ma-k+2}}, \qquad \text{если } ma \geqslant k+1,$$
$$S \ll z^{\rho_k} X^{1+(ma-k)\rho_k} + z^{-\frac{1}{3}} X^{\frac{k+1-ma}{3}}, \quad \text{если } ma < k+1.$$

Если мы теперь выполним вычисления, аналогичные изложенным в §§ 12, 13 и 14 нашей работы [2], то найдем

$$H_k \ll X^{r-2ma-3a} \qquad (k = 3, 4, \ldots, n). \tag{39}$$

§ 9. Для оценки интегралов, входящих в H_{n+1}, мы пользуемся очевидным неравенством

$$|S| < X$$

и проводим такие же вычисления, как в § 15 нашей работы [2]. В результате находим

$$H_{n+1} \ll X^{r-2ma-3a}. \tag{40}$$

С помощью оценок (26), (36), (39) и (40) для H_k $(k = 1, \ldots, n+1)$ мы получаем из (10)

$$I_M - H_M \ll X^{r-2ma-3a} + |R|.$$

Но оценку для R мы можем найти, если применим те же рассуждения, как и в § 16 нашей работы [2]. Таким образом получим

$$R \ll X^{r-2ma-3a},$$

следовательно,

$$I_M - H_M \ll X^{r-2ma-3a}. \tag{41}$$

В частности, положив $\lambda=\mu=0$, будем иметь

$$I_N-H_N \ll X^{r-2ma-3\alpha}. \tag{42}$$

В неравенстве (41), справедливом для любого M, мы можем заменить H_M через H_N, как это показано в § 17 нашей работы (²). Поэтому

$$I_M-H_N \ll X^{r-2ma-3\alpha}.$$

Из последнего неравенства находим

$$\sum I_M-\Lambda H_N \ll \Lambda X^{r-2ma-3\alpha}, \tag{43}$$

где суммирование распространяется на все числа M, а Λ попрежнему означает число чисел M и определяется формулой (7). Легко найти, что

$$\sum I_M=J+O(X^{r-1}\log^{2r}X), \tag{44}$$

где

$$J=\int\underset{(A)}{\ldots}\int dx_1\ldots dx_r,$$

а область (A) определяется неравенствами

$$(A)\qquad \begin{cases} \left|\sum_{\lambda=1}^{r}(\varphi(x_\lambda))^{a+bi}-(N_1+N_2i)\right|<X^{ma-\eta}+\mu\Delta_1,\\ 0<x_\lambda<X.\end{cases}$$

Здесь μ удовлетворяет условиям

$$-2\sqrt{2}<\mu<2\sqrt{2}.$$

§ 10. Для вычисления интеграла J вводим подстановку

$$x_\lambda=\frac{X}{l}t_\lambda \qquad (\lambda=1,\ldots,r),$$

где l — положительное число, лежащее между постоянными пределами. Получаем

$$J=\left(\frac{X}{l}\right)^r J_1, \tag{45}$$

где

$$J_1=\int\underset{(B)}{\ldots}\int dt_1\ldots dt_r,$$

причем область (B) определяется следующим образом

$$(B)\qquad \begin{cases} \left|\sum_{\lambda=1}^{r}\left(\varphi\left(\frac{X}{l}t_\lambda\right)\right)^{a+bi}-(N_1+N_2i)\right|<X^{ma-\eta}+\mu\Delta_1,\\ 0<t_\lambda<l.\end{cases}$$

Первое из неравенств, определяющих (B), можно заменить следующим:

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{r}\left(\gamma\left(\frac{X}{l}t_\lambda\right)^m\right)^{a+bi}-(N_1+N_2 i)\right|<X^{ma-\eta}+O(X^{ma-1}),$$

или

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{r}t_\lambda^{m(a+bi)}-\frac{(N_1+N_2 i)\,l^{m(a+bi)}}{(\gamma X^m)^{a+bi}}\right|<\frac{X^{-\eta}\,l^{ma}}{\gamma^a}+O(X^{-1}).$$

Полагая

$$\frac{(N_1+N_2 i)\,l^{m(a+bi)}}{(\gamma X^m)^{a+bi}}=n_1+n_2 i,$$

мы имеем в виду (6)

$$|n_1+n_2 i|=l^{ma}.$$

Обозначая еще

$$\sigma=\gamma^{-a}X^{-\eta}+O(X^{-1}), \tag{46}$$

мы можем последнее неравенство переписать в виде

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{r}t_\lambda^{ma}\cos(mb\log t_\lambda)-n_1\right)^2+\left(\sum_{\lambda=1}^{r}t_\lambda^{ma}\sin(mb\log t_\lambda)-n_2\right)^2<l^{2ma}\sigma^2$$

и область (B) заменить следующей:

$$(B')\begin{cases}\left(\sum\limits_{\lambda=1}^{r}t_\lambda^{ma}\cos(mb\log t_\lambda)-n_1\right)^2+\left(\sum\limits_{\lambda=1}^{r}t_\lambda^{ma}\sin(mb\log t_\lambda)-n_2\right)^2<l^{2ma}\sigma^2,\\ \qquad 0<t_\lambda<l.\end{cases}$$

При помощи рассуждений, изложенных в § 19 нашей работы ([2]), мы выводим, что область (B') можно заменить следующей:

$$(B'')\begin{cases}l^{ma}(1-k\sigma)<\sum\limits_{\lambda=1}^{r}t_\lambda^{ma}\sin(\Psi+mb\log t_\lambda)<l^{ma}(1+k\sigma),\\ -l^{ma}k\sigma<\sum\limits_{\lambda=1}^{r}t_\lambda^{ma}\cos(\Psi+mb\log t_\lambda)<+l^{ma}k\sigma,\\ \qquad 0<t_\lambda<l,\end{cases}$$

где

$$\Psi=\arg(n_1+n_2 i),\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}<k<1.$$

Выбрав теперь надлежащее значение l в промежутке

$$1\leqslant l\leqslant e^{\frac{\pi}{m|b|}},$$

как это указано в § 20 работы ([2]), мы выводим, что

$$J_1=Dl^{2ma}k^2\sigma^2,$$

где D превосходит положительную величину, зависящую только от a, b, m, γ и r. Поэтому из (45) получаем

$$J = \left(\frac{X}{l}\right)^r Dl^{2ma} k^2 \sigma^2$$

и из (44) находим

$$\sum I_M = \left(\frac{X}{l}\right)^r Dl^{2ma} k^2 \sigma^2 + O(X^{r-1} \log^{2r} X).$$

Подставим сюда значение (46) для σ; тогда

$$\sum I_M = Dk^2 l^{2ma-r} \gamma^{-2a} X^{r-2\eta} + O(X^{r-1} \log^{2r} X).$$

Следовательно, из (43) получаем

$$Dk^2 l^{2ma-r} \gamma^{-2a} X^{r-2\eta} - \Delta H_N \ll \Delta X^{r-2ma-3\alpha};$$

поэтому из (42) находим

$$I_N - \frac{Dk^2 l^{2ma-r} \gamma^{-2a} X^{r-2\eta}}{\Lambda} \ll X^{r-2ma-3\alpha}.$$

Подставив сюда значение Λ из (7), мы получаем при помощи простых вычислений

$$I_N = LX^{r-2a-2\alpha} (1 + O(X^{-\alpha})),$$

где

$$L = \frac{4}{\pi} Dk^2 l^{2ma-r} \gamma^{-2a}.$$

Теорема таким образом доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
19.III.1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сегал Б. И., Новый тип диофантовых приближений, Докл. Ак. Н. СССР, т. XIX, № 9 (1938), 667—670.

[2] Сегал Б. И., Приближение комплексных чисел суммой степеней целых чисел с данным комплексным показателем, Мат. сб., т. 5 (47) : 1 (1939), 147—183.

[3] Van der Corput J. G., Neue zahlentheoretische Abschätzungen (zweite Mitteilung), Math. Zeitschr., 29 (1929), 397—426.

[4] Van der Corput J. G., Sur la méthode de Weyl dans la théorie des nombres (Troisième communication), Proc. Royal Acad., Amsterdam, vol XL (1937), 836—846.

[5] Виноградов И. М., Оценки тригонометрических сумм, Изв. Ак. Н. СССР, Серия матем., (1938), № 5—6, 503—524.

B. SEGAL. REPRESENTATION OF COMPLEX NUMBERS BY SUMS OF POWERS OF POLYNOMIALS

SUMMARY

Let $\varphi(x)=\gamma x^m+\gamma_1 x^{m-1}+\ldots+\gamma_m$ be a given polynomial, where $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ are real and $\gamma>0$; $a+bi$ a given complex number, $a>\frac{1}{m}$, $b\neq 0$. We consider the representation of any complex number $N=N_1+N_2 i$ in the form

$$N_1+N_2 i=h_1+h_2 i+\sum_{\lambda=1}^{r}(\varphi(x_\lambda))^{a+bi}, \tag{1}$$

where h_1 and h_2 are bounded and the x_λ run only over integers.

We introduce the following denotations: $n=[ma]+2$, $a'=n-ma-1$, r is an integer $\geqslant r_0$, where

$$r_0=\left[\frac{2n}{\rho_n}\right]+1=\frac{2n}{\rho_n}+\varepsilon', \quad 0<\varepsilon'\leqslant 1,$$

$$\rho_n=\begin{cases} 2^{-n}, & \text{if } n<14, \\ [2(n+1)^3\log(n+1)]^{-1}, & \text{if } n\geqslant 14. \end{cases}$$

Further

$$X=\gamma^{-\frac{1}{m}}|N|^{\frac{1}{ma}}, \quad \alpha=\frac{a'\varepsilon'}{r_0}, \quad \Delta_1=X^{-a}.$$

The main result of the present paper may be stated as follows:

THEOREM. *For the number I_N of representations of N in the form* (1), *where $x_1, \ldots, x_r$ satisfy the conditions*

$$0<x_\lambda<X \qquad (\lambda=1, \ldots, r)$$

and h_1 and h_2 satisfy the conditions

$$-\Delta_1\leqslant h_1\leqslant\Delta_1, \quad -\Delta_1\leqslant h_2\leqslant\Delta_1$$

we have the asymptotical formula

$$I_N=LX^{r-2ma-2a}(1+O(X^{-\alpha})),$$

where L exceeds a positive constant number depending only on a, b, m, γ and r.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Н. В. СМИРНОВ

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В СХЕМЕ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Пусть произведено n независимых испытаний с постоянной вероятностью p появления события A (схема Бернулли). В настоящей работе исследуется поведение случайных величин $T_n(x)$, дающих для каждого значения x $(0 \leqslant x \leqslant n)$ число появлений события A в испытаниях с номерами, не превышающими x. На плоскости (x, y) рассматривается кривая $y = T_n(x)$ и устанавливается предельный закон распределения для числа выходов этой кривой за пределы полосы, ограниченной кривыми

$$y_\lambda = \overline{T}_n(x) \pm \lambda \sqrt{np(1-p)},$$

где $\overline{T}_n(x) = ET_n(x)$, $p = P(A)$, а λ — произвольное постоянное > 0.

Пусть p вероятность события A, m_k — число появлений события в k последовательных независимых испытаниях. Все течение случайного процесса в первых n опытах мы можем изобразить с помощью ступенчатой кривой $y = T_n(x)$, где $T_n(x)$ при данном x выражает число появившихся событий в испытаниях с номерами, не превышающими x; таким образом

$$\left.\begin{array}{lll} T_n(x) = 0 & \text{при} & x < 1, \\ T_n(x) = m_k, & \text{если} & k \leqslant x < k+1, \\ T_n(x) = m_n & \text{при} & x \geqslant n. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Если $k \leqslant x < k+1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, то

$$ET_n(x) = kp; \tag{2}$$

кроме того $ET_n(x) = 0$ для $x < 1$ и $ET_n(x) = np$ при $x \geqslant n$. Кривая математического ожидания случайной функции $T_n(x)$ в промежутке $(0, n)$ изобразится ломаной $\overline{y} = \overline{T}_n(x)$ со скачками, равными p в каждой точке $x = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим полосу $\mathfrak{A}_\lambda$, ограниченную кривыми $y_\lambda = \overline{T}_n(x) \pm \lambda \sqrt{np(1-p)}$, и обозначим через $V_n(\lambda)$ число выходов случайной кривой $T_n(x)$ за границы этой полосы в промежутке $(0, n)$. Очевидно

$$V_n(\lambda) = v_n^+(\lambda) + v_n^-(\lambda), \tag{3}$$

где $v_n^+(\lambda)$ и $v_n^-(\lambda)$ обозначают число выходов $T_n(x)$ через верхнюю и нижнюю границу полосы $\mathfrak{A}_\lambda$.

В работе автора «О числе перемен знака в последовательностях уклонений» ([1]) был исследован закон распределения величин $v_n^+(\lambda)$

и $v_n^-(\lambda)$ для больших значений n. Предельная теорема, установленная в этой работе, утверждала, что для $n \to \infty$

$$P\left\{v_n^+(\lambda) \leqslant t\sqrt{npq}\right\} \to \Phi(t, \lambda), \tag{4}$$

где $t \geqslant 0$, $q = 1 - p$,

$$\Phi(t, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\lambda}^{t} e^{-\frac{(u+\lambda)^2}{2}} du. \tag{4'}$$

Аналогичное предложение будет иметь место, как нетрудно видеть, и для $v_n^-(\lambda)$.

В настоящем исследовании мы рассматриваем закон распределения величины $V_n(\lambda)$.

Пусть

$$F_n(t, \lambda) = P\left(V_n(\lambda) \leqslant t\sqrt{npq}\right) \quad (t \geqslant 0). \tag{5}$$

Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *При* $n \to \infty$

$$F_n(t, \lambda) \to F(t, \lambda), \tag{6}$$

где

$$F(t, \lambda) = 1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} t^m \int_{t}^{\infty} e^{-\frac{[u+(2m+1)\lambda]^2}{2}} du \quad (t \geqslant 0). \tag{6'}$$

В качестве следствия из теоремы отметим следующее предельное соотношение:

$$P\left\{\sup|T_n(x) - \overline{T}_n(x)| \leqslant \lambda\sqrt{npq}\right\} = F_n(0, \lambda) \to F(0, \lambda), \tag{7}$$

где

$$F(0, \lambda) = 1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{[u+(2m+1)\lambda]^2}{2}} du. \tag{7'}$$

Метод доказательства основывается на одной лемме, доказанной в упомянутой выше работе автора ([1]).

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — последовательность случайных событий и $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}$ $(1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \ldots < \alpha_s \leqslant n)$ обозначает вероятность положительных исходов в испытаниях с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Полагая

$$\nu_s(n) = \sum_{(1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_s \leqslant n)} p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} \tag{8}$$

и

$$F_n(t) = P\{m_n \leqslant t\mu(n)\}, \tag{9}$$

где $t \geqslant 0$, m_n — число положительных исходов в первых n испытаниях и $\mu(n)$ — некоторая положительная функция n, неограниченно возрастающая при $n \to \infty$. Тогда имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Пусть для всякого фиксированного s и $n \to \infty$*

$$\frac{\nu_s(n)}{[\mu(n)]^s} \to \nu_s \qquad (s=1, 2, \ldots) \tag{10}$$

и величины ν_s удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{\nu_s} < A, \tag{11}$$

где A — некоторая положительная константа. Тогда последовательность функций $F_n(t)$ при $n \to \infty$ сходится к некоторому предельному закону $F(t)$. При этом

$$M_s = \int_0^\infty x^s \, dF(x) = \nu_s \cdot s! \tag{12}$$

Переходя к доказательству теоремы, заметим, что величина $v_n^-(\lambda)$ очевидно равна числу точек пересечения ломаной $T_n(x)$ с кривой $y_\lambda = \overline{T}_n(x) - \lambda\sqrt{npq}$, лежащих на вертикальных ступенях последней. Величина $v_n^+(\lambda)$, как нетрудно видеть, может лишь на единицу отличаться от числа точек пересечения $T_n(x)$ с вертикальными ступенями ломаной $y_\lambda = \overline{T}_n(x) + \lambda\sqrt{npq}$. Таким образом (с несущественной для больших значений n ошибкой) мы можем интерпретировать величину $V_n(\lambda)$ как число точек пересечения ломаной $T_n(x)$ с вертикальными ступенями ломаных $y_\lambda = \overline{T}_n(x) \pm \lambda\sqrt{npq}$, ограничивающих в промежутке $(0, n)$ полосу $\mathfrak{A}_\lambda$. Если в точке $x = k$ имеет место пересечение подобного рода, то выполняются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} m_{k-1} &= m_k, \\ m_{k-1} &\geqslant (k-1)p + \varepsilon\lambda\sqrt{npq}, \\ m_k &= m_{k-1} > kp + \varepsilon\lambda\sqrt{npq}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, смотря по тому, рассматривается ли пересечение с верхней или нижней границей полосы $\mathfrak{A}_\lambda$. Обозначая через α общее значение m_{k-1} и m_k, из (13) легко вывести, что точки пересечения указанного вида могут получаться лишь для чисел испытаний $k = n_\alpha(\varepsilon)$, где

$$n_\alpha(\varepsilon) = \left[\frac{\alpha + \varepsilon\lambda\sqrt{npq}}{n}\right] + 1. \tag{14}$$

При этом в точке n_α пересечение состоится, если

$$m_{n_\alpha(\varepsilon)} = m_{n_\alpha(\varepsilon)-1} = \alpha. \tag{15}$$

Обозначим через E_k событие, заключающееся в появлении точки пересечения кривой $T_n(x)$ с вертикальной ступенью границы $\mathfrak{A}_\lambda$ при $x = k$. Как было указано, отличную от нуля вероятность будут иметь события с номерами $n_\alpha(\varepsilon)$ вида (14), причем событие $E_{n_\alpha(\varepsilon)}$ равносильно осуществлению равенств (15). Положим

$$\pi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s) = P\left\{E_{n_{\alpha_1}(\varepsilon_1)} E_{n_{\alpha_2}(\varepsilon_2)} \ldots E_{n_{\alpha_s}(\varepsilon_s)}\right\}, \tag{16}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots; \varepsilon_s$ — некоторая данная последовательность символов ε_k, принимающих два значения ± 1, а индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_s, \\ 1 < n_{\alpha_1}(\varepsilon_1) < n_{\alpha_2}(\varepsilon_2) < \ldots < n_{\alpha_s}(\varepsilon_s) \leqslant n. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Пользуясь (15) и (16), нетрудно получить

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s) &= P\left\{ m_{n_{\alpha_k}(\varepsilon_k)} = m_{n_{\alpha_k}(\varepsilon)-1} = \alpha_k \right\} = \\ = P\left\{ m_{n_{\alpha_1}(\varepsilon_1)-1} = \alpha_1 \right\} q \cdot P &\left\{ m_{n_{\alpha_2}(\varepsilon_2) - n_{\alpha_1}(\varepsilon_1) - 1} = \alpha_2 - \alpha_1 \right\} q \ldots \\ \ldots P &\left(m_{n_{\alpha_s}(\varepsilon_s) - n_{\alpha_{s-1}}(\varepsilon_{s-1}) - 1} = \alpha_s - \alpha_{s-1} \right) q, \end{aligned} \tag{18}$$

причем

$$P(m_k = \gamma) = \frac{k!\,\cdot}{\gamma!\,(k-\gamma)!} \cdot p^\gamma q^{k-\gamma}. \tag{19}$$

Имея в виду применить лемму 1, введем величину

$$\nu_s(n) = \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_s)} \sum_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s)} \pi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots; \varepsilon_s), \tag{20}$$

где суммирование распространяется на всевозможные комбинации символов $\varepsilon_k = \pm 1$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ и системы индексов α_k, удовлетво ряющих условиям (17). Полагая кроме того

$$\mu(n) = \sqrt{npq}, \tag{21}$$

установим следующее предложение:

ЛЕММА 2. *При* $n \to \infty$ *и фиксированном* $s = 1, 2, \ldots$

$$\frac{\nu_s(n)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} \to I_s(\lambda), \tag{22}$$

где

$$I_s(\lambda) = \sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_s)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int_{(D)} \cdots \int \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}\left[\frac{1}{x_1} + \sum\limits_{k=2}^{s} \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})^2}{x_k}\right]}}{\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_s}} dx_1 \ldots dx_s \tag{23}$$

и область D *интегрирования определяется неравенствами*

$$x_i \geqslant 0; \quad \sum_1^s x_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{23'}$$

Пусть $\eta > 0$ $\left(\eta < \frac{1}{s+1}\right)$. Разобьем сумму (20) на две суммы $Q_{sn}(\eta, \lambda)$ и $R_{sn}(\eta, \lambda)$, причем в сумму $Q_{sn}(\eta, \lambda)$ отнесем те слагаемые (20), у которых индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ (кроме (17)) удовлетворяют условиям

$$\alpha_1 \geqslant n\eta, \alpha_2 - \alpha_1 > n\eta, \ldots, \alpha_s - \alpha_{s-1} > n\eta. \tag{24}$$

В сумме же $R_{sn}(\eta, \lambda)$ условие (24) нарушается, хотя бы при одном $k = 1, 2, \ldots, s$ в каждом слагаемом.

Как известно, для всех значений k имеет место следующаа оценка

$$P(m_k=\gamma)<\frac{C}{\sqrt{k+1}} \quad (\gamma=0, 1, 2, \ldots, k), \tag{25}$$

где C — положительная константа.

Пользуясь (18), (19) и (25), легко получить

$$\pi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s)<\frac{C^s q^s}{\sqrt{n_{\alpha_1}(\varepsilon)\,[n_{\alpha_2}(\varepsilon_2)-n_{\alpha_1}(\varepsilon_1)]\ldots[n_{\alpha_s}(\varepsilon_s)-n_{\alpha_{s-1}}(\varepsilon_{s-1})]}}. \tag{26}$$

Представим $R_{sn}(\eta, \lambda)$ в виде

$$R_{sn}(\eta, \lambda)=\sum_{(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_s)} R_{sn}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s), \tag{27}$$

где $R_{sn}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s)$, при данной комбинации символов ε_k, представляет сумму вероятностей $\pi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s)$, для которых хотя бы при одном k справедливо неравенство

$$\alpha_k-\alpha_{k-1}\leqslant n\eta. \tag{28}$$

На основании (26) и (14) легко установить неравенство

$$0<R_{sn}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s)<C^s q^s \sum_{k=1}^{s} S_k, \tag{29}$$

где

$$S_k=\sum_{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_s)}{}' \frac{1}{\sqrt{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}}. \tag{30}$$

При этом индексы β_j в сумме S_k связаны условиями

$$\left.\begin{aligned} \beta_j>0; \quad \sum_{1}^{s}\beta_j<n, \\ \beta_k<\frac{n\eta+2\lambda\sqrt{npq}}{p}+1=h_n. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Для суммы S_1 имеем

$$0<n^{\frac{s}{2}}S_1<\sum_{\beta_1=1}^{\beta_1=[h_n]}\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta_1}{n}}}\,\frac{1}{n}\sum_{\left(\sum\limits_{r=2}^{s}\beta_r<n\right)}\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta_2}{n}\cdots\frac{\beta_s}{n}}}\cdot\frac{1}{n^{s-1}}, \tag{32}$$

откуда при достаточно большом n следует

$$n^{\frac{s}{2}}S_1<\sqrt{\eta}\,G_s, \tag{33}$$

причем константа G_s не зависит от n и η.

Аналогичную оценку в силу симметрии индексов β_j можно получить и для S_k при $k=2, 3, \ldots, s$.

Принимая во внимание (29) и (33), получим

$$0 \leqslant \frac{R_{sn}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} < \sqrt{\eta}\, G_s', \tag{34}$$

$$0 < \frac{R_{sn}(\eta, \lambda)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} < 2^s G_s' \sqrt{\eta} = \sqrt{\eta}\, G_s'', \tag{35}$$

где константы G_s и G_s'' не зависят от n и η.

Обращаясь к сумме $Q_{sn}(\eta, \lambda)$ и принимая во внимание (24), мы прежде всего обычными приемами легко получим следующее выражение:

$$P\{m_{n_{\alpha_k}(\varepsilon_k) - n_{\alpha_{k-1}}(\varepsilon_{k-1}) - 1} = \alpha_k - \alpha_{k-1}\} = \frac{(1+\delta_n)}{\sqrt{2\pi(\alpha_k - \alpha_{k-1})\, q}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2} \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})^2 np}{\alpha_k - \alpha_{k-1}}}, \tag{36}$$

где

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n} \cdot \eta^3}\right),$$

и в силу (18) найдем

$$\frac{\pi_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}\left[\frac{np}{\alpha_1} + \sum\limits_2^s \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})^2 np}{(\alpha_k - \alpha_{k-1})}\right]}}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{np} \prod\limits_{k=2}^{k=s} \frac{(\alpha_k - \alpha_{k-1})}{np} (np)^s}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}\, \eta^3}\right)\right). \tag{37}$$

Из условий (17) следует, что максимальное значение индекса α_s в сумме $Q_{sn}(\eta, \lambda)$ асимптотически равно np. Принимая во внимание (24), из (37) получим

$$\frac{Q_{sn}(\eta, \lambda)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \sum_{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_s)} I_s(\eta, \lambda, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s), \tag{38}$$

где

$$I_s(\eta, \lambda, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int \ldots \int_{(D_\eta)} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}\left[\frac{1}{x_1} + \sum\limits_2^s \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})^2}{x_k}\right]}}{\sqrt{x_1 \prod\limits_2^s (x_k - x_{k-1})}}\, dx_1 \ldots dx_s \tag{39}$$

и область интегрирования (D_η) определяется неравенствами

$$x_1 \geqslant \eta; \quad x_k - x_{k-1} \geqslant \eta; \quad x_s < 1. \tag{39'}$$

Но из (38), (39) и (23) легко получить

$$\sum_{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_s)} I_s(\eta, \lambda, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) = I_s(\lambda) + O(\sqrt{\eta}). \tag{40}$$

Принимая во внимание (35), (38), (40), мы, в силу произвольной малости η, приходим к выводу

$$\frac{\nu_s(n)}{(npq)^{\frac{s}{2}}} \to I_s(\lambda) \quad (n \to \infty),$$

что и доказывает лемму 2.

Займемся теперь преобразованием интеграла

$$I_s(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \underset{\substack{(\sum_1^s x_i < 1) \\ x_i > 0}}{\int \cdots \int} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}\left[\frac{1}{x_1} + \sum_2^s \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})^2}{x_k}\right]}}{\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_s}} dx_1 \ldots dx_s, \tag{41}$$

являющегося членом суммы (23). Интегрируя по x_s, выделим интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1-x_1-\ldots-x_s} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1})^2}{x_s}}}{\sqrt{x_s}} dx_s,$$

который подстановкой $x_s = \frac{u_s^2}{1+u_s^2}(1 - x_1 - \ldots - x_{s-1})$ преобразовывается в

$$\sqrt{1 - x_1 - \ldots - x_{s-1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}(\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1})^2 \frac{1+u_s^2}{u_s^2(1-x_1-\ldots-x_{s-1})}}}{(1+u_s^2)^{\frac{3}{2}}} du_s.$$

Последний интеграл может быть представлен в виде двойного

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-1}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{2}(\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1})^2 \frac{(1+u_s^2)^2}{u_s^2(1-x_1-\ldots-x_{s-1})}} du_s \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2(1+u_s^2)} y^2\, dy,$$

и после интеграции по u_s будем иметь

$$\frac{\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-1}}}{\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(y + \frac{\lambda|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|}{\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-1}}}\right)^2} y\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-1}}} \int_0^\infty e^{-\frac{(t_s+\lambda|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|)^2}{2(1-x_1-\ldots-x_{s-1})}} t_s\, dt_s \tag{42}$$

$$\left(y = \frac{t_s}{\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-1}}}\right).$$

Интегрируя теперь в (41) по x_{s-1}, мы будем иметь дело с интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{s-2}} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{(\varepsilon_{s-1}-\varepsilon_{s-2})^2}{x_{s-1}} - \frac{(t_s+\lambda|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|)^2}{2(1-x_1-\ldots-x_{s-1})}}}{\sqrt{x_{s-1}(1-x_1-\ldots-x_{s-1})}} dx_{s-1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{(\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1})^2}{(1-x_1-\ldots-x_{s-2})}\frac{1+u_{s-1}^2}{u_{s-1}^2} - \frac{(t_s+\lambda|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|)^2}{2(1-x_1-\ldots-x_{s-2})}(1+u_{s-1}^2)}}{1+u_{s-1}^2} du_{s-1}, \quad (43)$$

$$\left[x_{s-1} = \frac{u_{s-1}^2}{1+u_{s-1}^2}(1-x_1-\ldots-x_{s-2})\right].$$

Пользуясь легко проверяемым равенством

$$2\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2(1+u^2)}{u^2} - \frac{(1+u^2)b^2}{2}}}{1+u^2} du = \sqrt{2\pi} \int_{|b|}^{\infty} e^{-\frac{(|a|+u)^2}{2}} du, \quad (44)$$

мы приведем интеграл (43) к виду

$$\int_{\frac{t_s-\lambda|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|}{\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-2}}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y+\frac{|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|\lambda}{\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-2}}}\right)^2} dy =$$

$$= \int_{t_s}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(t_{s-1}+\lambda|\varepsilon_{s-1}-\varepsilon_{s-2}|+\lambda|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|)^2}{1-x_1-\ldots-x_{s-2}}}}{\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-2}}} dt_{s-1}$$

$$\left(y = \frac{t_{s-1}}{\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-2}}} + \frac{\lambda|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|}{\sqrt{1-x_1-\ldots-x_{s-2}}}\right).$$

После этих операций интеграл (41) можно переписать так:

$$I_s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s-2}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{2}} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{s-3}} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}\left[\frac{1}{x_1}+\sum_2^{s-2}\frac{(\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1})^2}{x_k}\right]}}{\sqrt{x_1x_2\ldots x_{s-2}(1-x_1-\ldots-x_{s-2})}} dx_{s-2} \int_0^{\infty} t_s\, dt_s \cdot$$

$$\cdot \int_{t_s}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t_{s-1}+\lambda|\varepsilon_{s-1}-\varepsilon_{s-2}|+\lambda|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|)^2}{1-x_1-\ldots-x_{s-2}}} dt_{s-1}.$$

Продолжая оперировать тем же приемом, мы приведем его к виду

$$I_s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^{\infty} t_s\, dt_s \int_{t_s}^{\infty} dt_{s-1} \int_{t_{s-1}}^{\infty} dt_{s-2} \ldots$$

$$\ldots \int_{t_2}^{\infty} dt_1 e^{-\frac{(t_1+\lambda|\varepsilon_s-\varepsilon_{s-1}|+\lambda|\varepsilon_{s-1}-\varepsilon_{s-2}|+\ldots+\lambda|\varepsilon_2-\varepsilon_1|+\lambda)^2}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} t_s\, dt_s \int_{t_s}^{\infty} e^{-\frac{\left(t_1+\lambda+\lambda\sum_2^s|\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1}|\right)^2}{2}} \frac{(t_1-t_s)^{s-2}}{(s-2)!} dt_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(s-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\left(t_1+\lambda+\lambda\sum_2^s|\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1}|\right)^2}{2}} t_1^{s-1}\, dt_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s!} \int_0^{\infty} e^{-\frac{[u+(2m+1)\lambda]^2}{2}} u^s\, du,$$

$$\left(\sum_2^s |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}| = 2m\right).$$

Таким образом

$$I_s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots; \varepsilon_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s!} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[u+(2m+1)\lambda]^2} u^s\, du, \tag{45}$$

где m обозначает число перемен знака в последовательности

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots; \varepsilon_s \qquad (\varepsilon_k = \pm 1).$$

Так как m перемен знака могут осуществиться $2C_{s-1}^m$ способами, то, принимая во внимание (23) и (45), мы получим

$$I_s(\lambda) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s!} \int_0^{\infty} u^s \sum_0^{s-1} C_{s-1}^m e^{-\frac{[u+(2m+1)\lambda]^2}{2}} du. \tag{46}$$

Теперь нетрудно убедиться, что выражение

$$s!\, I_s(\lambda) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u^s \sum_0^{s-1} C_{s-1}^m e^{-\frac{[u+(2m+1)\lambda]^2}{2}} du \tag{47}$$

представляет момент s-го порядка закона распределения $F(t, \lambda)$ (6). В самом деле, обозначая этот момент через M_s, мы имеем

$$M_s = s\int_0^{\infty} (1 - F(t, \lambda))\, t^{s-1} dt = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, s \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} q_{ms}, \tag{48}$$

где

$$q_{ms} = \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{d^m}{dt^m} t^m \int_0^{\infty} e^{-\frac{[u+(2m+1)\lambda]^2}{2}} du. \tag{49}$$

Интегрируя в (49) по частям, мы легко получим при $m > s-1$

$$q_{ms} = 0$$

и при $m \leqslant s-1$

$$q_{ms} = (-1)^m \frac{(s-1)\ldots(s-m)}{s} \int_0^\infty t^s e^{\frac{-(t+(2m+1)\lambda)^2}{2}} dt. \qquad (50)$$

Из (47), (48), (49), (50) следует

$$M_s = s!\, I_s(\lambda). \qquad (51)$$

Нетрудно убедиться, что все условия для применимости леммы 1 соблюдены. Из лемм 1, 2 и равенства (51) следует предельное соотношение (6).

Заметим, что следствие, выражаемое (7), является частным случаем общей теоремы, доказанной А. Н. Колмогоровым о суммах случайных величин ([2]).

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
17. II. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Смирнов Н. В., О числе перемен знака в последовательности уклонений, Изв. Ак. Наук СССР, Сер. матем., 1937, № 3, стр. 361—371.

[2] Kolmogoroff A., Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Изв. Ак. Наук СССР, 1933, стр. 363.

N. SMIRNOFF. SUR UN THÉORÈME LIMITE DANS UN SCHÈME D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES

RÉSUMÉ

Soit pour chaque valeur de x $(0 < x \leqslant n)$ $T_n(x)$ le nombre de fois qu'un événement A a lieu dans un système d'épreuves indépendantes dont les indices ne surpassent pas x, $P(A) = pn$, $\overline{T}_n(x) = ET_n(x)$ de sorte que $\overline{T}_n(x) = kp$ $(k \leqslant x < k+1)$. Désignons par $V_n(\lambda)$ le nombre de fois que la courbe $T_n(x)$ sort de la bande $\mathfrak{A}_\lambda$ bornée par les courbes $y_\lambda = \overline{T}_n(x) \pm \lambda\sqrt{np(1-p)}$ dans l'intervalle $(0, n)$.

Le théorème limite suivant a lieu:

THÉORÈME. *Pour* $n \to \infty$ *on a*

$$P\{V_n(\lambda) \leqslant t\sqrt{np(1-p)}\} \to F(t, \lambda),$$

où

$$F(t, \lambda) = 1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} t^m \int_t^\infty e^{\frac{-[u+(2m+1)\lambda]^2}{2}} du$$

$$(t \geqslant 0).$$

Comme conséquence de ce théorème on obtient

$$P\{\sup_{0<x<\infty} |T_n(x) - \overline{T}_n(x)| \leqslant \lambda\sqrt{np(1-p)}\} = P\{V_n(\lambda) = 0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(0, \lambda).$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая — Série mathématique

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ О ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД (СЛУЧАЙ ТРЕХ ОСОБЫХ ТОЧЕК)

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В статье излагается в общем виде метод, с помощью которого автором уже было решено несколько задач из теории движения грунтовых вод. При этом упрощается способ вычисления показателей.

В настоящей статье мы занимаемся решением такой задачи. Даны три точки на вещественной оси плоскости комплексного переменного t Требуется найти две функции Z и F комплексного переменного t, аналитические в верхней полуплоскости t и регулярные в ней всюду за исключением трех данных точек вещественной оси, где эти функции имеют регулярные особенности, причем в каждом из трех промежутков вещественной оси, на которые она делится данными точками, Z и F подчинены двум условиям вида: линейная комбинация с постоянными коэффициентами этих двух функций имеет вещественное значение в этом промежутке. При этом мы ограничиваемся рассмотрением того случая, когда условия на трех отрезках плоскости t дают три пересекающиеся окружности на плоскости $\zeta = \frac{F}{Z}$.

В последнем параграфе мы иллюстрируем задачу примером из области движения грунтовых вод.

§ 1

Рассмотрим следующую задачу.

На плоскости комплексного переменного t даны три точки A_1, A_2, A_3, в которых соответственно $t=a_1$, $t=a_2$, $t=a_3$, где a_1, a_2, a_3 — вещественные числа (в дальнейшем будем считать $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=\infty$). Требуется найти две функции Z и F, удовлетворяющие на отрезках вещественной оси соотношениям:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{на отрезке} & A_3A_1 & I(k_1Z+l_1F)=0, & I(m_1Z+n_1F)=0; \\ \text{»} & A_1A_2 & I(k_2Z+l_2F)=0, & I(m_2Z+n_2F)=0; \\ \text{»} & A_2A_3 & I(k_3Z+l_3F)=0, & I(m_3Z+n_3F)=0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

($I(z)$ означает мнимую часть z). При этом k_i, l_i, m_i, n_i должны удовлетворять условию

$$\begin{vmatrix} k_i & l_i \\ m_i & n_i \end{vmatrix} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Функции Z и F являются аналитическими функциями в верхней полуплоскости, имеют A_1, A_2, A_3 регулярными особыми точками и стремятся к определенному пределу, непрерывному вдоль отрезка, при приближении к любой точке вещественной оси каждого из отрезков.

Отметим прежде всего, что условиям (1) можно дать некоторую геометрическую иллюстрацию. Возьмем условия хотя бы на отрезке A_3A_1. Из них вытекает уравнение

$$I\left(\frac{k_1 + l_1\zeta}{m_1 + n_1\zeta}\right) = 0, \tag{3}$$

где $\zeta = \dfrac{F}{Z}$.

Уравнение (3) есть уравнение окружности и притом вещественной [1]. Последнее вытекает из того, что линейное преобразование

$$\zeta_1 = \frac{k_1 + l_1\zeta}{m_1 + n_1\zeta}$$

переводит уравнение (3) в уравнение вещественной оси плоскости ζ_1:

$$I(\zeta_1) = 0.$$

Уравнение (3) может быть переписано так:

$$(l_1\bar{n}_1 - \bar{l}_1 n_1)\zeta\bar{\zeta} + (l_1\bar{m}_1 - \bar{k}_1 n_1)\zeta + (k_1\bar{n}_1 - \bar{l}_1 m_1)\bar{\zeta} + k_1\bar{m}_1 - \bar{k}_1 m_1 = 0$$

или

$$\left(\zeta + \frac{k_1\bar{n}_1 - \bar{l}_1 m_1}{l_1\bar{n}_1 - \bar{l}_1 n_1}\right)\left(\bar{\zeta} + \frac{l_1\bar{m}_1 - \bar{k}_1 n_1}{l_1\bar{n}_1 - \bar{l}_1 n_1}\right) =$$

$$= \frac{(k_1\bar{n}_1 - \bar{l}_1 m_1)(l_1\bar{m}_1 - \bar{k}_1 n_1) - (k_1\bar{m}_1 - \bar{k}_1 m_1)(l_1\bar{n}_1 - \bar{l}_1 n_1)}{(l_1\bar{n}_1 - \bar{l}_1 n_1)^2},$$

откуда следует, что радиус окружности определяется формулой

$$r^2 = \frac{\bar{k}_1 l_1 m_1 \bar{n}_1 + k_1 \bar{l}_1 \bar{m}_1 n_1 - l_1 \bar{l}_1 m_1 \bar{m}_1 - k_1 \bar{k}_1 n_1 \bar{n}_1}{(l_1\bar{n}_1 - \bar{l}_1 n_1)^2}.$$

В нашей статье [2] мы показали, что функции Z и F могут быть продолжены в нижнюю полуплоскость t, и что при положительном обходе вокруг каждой из особых точек A_1, A_2, A_3 эти функции испытывают линейную подстановку определенного вида. А именно, если обозначить через Z^* и F^* те значения, в которые переходят Z и F после обхода вокруг точки $t = 0$, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
Z^* &= \frac{(k_2\bar{n}_2 - m_2\bar{l}_2)(\bar{k}_1 n_1 - \bar{m}_1 l_1) + (\bar{k}_2 m_2 - k_2\bar{m}_2)(\bar{l}_1 n_1 - \bar{n}_1 l_1)}{(k_1 n_1 - l_1 m_1)(\bar{k}_2\bar{n}_2 - \bar{l}_2\bar{m}_2)} Z + \\
&+ \frac{(l_2\bar{n}_2 - n_2\bar{l}_2)(\bar{k}_1 n_1 - \bar{m}_1 l_1) + (\bar{k}_2 n_2 - m_2\bar{l}_2)(\bar{l}_1 n_1 - \bar{n}_1 l_1)}{(k_1 n_1 - l_1 m_1)(\bar{k}_2\bar{n}_2 - \bar{l}_2\bar{m}_2)} F, \\
F^* &= \frac{(k_2\bar{n}_2 - m_2\bar{l}_2)(\bar{k}_1 m_1 - k_1\bar{m}_1) + (\bar{k}_2 m_2 - k_2\bar{m}_2)(k_1\bar{n}_1 - m_1\bar{l}_1)}{(k_1 n_1 - l_1 m_1)(\bar{k}_2\bar{n}_2 - \bar{l}_2\bar{m}_2)} Z + \\
&+ \frac{(l_2\bar{n}_2 - n_2\bar{l}_2)(\bar{k}_1 m_1 - \bar{k}_1 m_1) + (\bar{k}_2 n_2 - m_2\bar{l}_2)(k_1\bar{n}_1 - m_1\bar{l}_1)}{(k_1 n_1 - l_1 m_1)(\bar{k}_2\bar{n}_2 - \bar{l}_2\bar{m}_2)} F.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Для того чтобы упростить соотношения (4), заменим функции Z и F их линейными комбинациями, положив

$$Z_1 = k_2 Z + l_2 F,$$
$$F_1 = m_2 Z + n_2 F.$$

Тогда на отрезке A_1A_2 будем иметь

$$I(Z_1) = 0, \quad I(F_1) = 0.$$

На отрезках A_3A_1 и A_2A_3 будем иметь для Z_1 и F_1 условия того же вида, что и для Z и F, но с другими коэффициентами. Если мы сможем найти функции Z_1 и F_1, то найдем и Z и F. Поэтому, несколько меняя обозначения, будем считать, что нам даны условия:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{на отрезке} & A_3A_1 & I(kZ + lF) = 0, & I(mZ + nF) = 0; \\ \text{»} & A_1A_2 & I(Z) = 0, & I(F) = 0; \\ \text{»} & A_2A_3 & I(k_0Z + l_0F) = 0, & I(m_0Z + n_0F) = 0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Тогда вместо уравнений (4) получим

$$\left.\begin{aligned} Z^* &= \frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} Z + \frac{\bar{l}n - l\bar{n}}{kn - ml} F, \\ F^* &= \frac{k\bar{m} - \bar{k}m}{kn - ml} Z + \frac{k\bar{n} - m\bar{l}}{kn - lm} F. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Характеристическое уравнение около точки $t = 0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} - \lambda & \dfrac{\bar{l}n - l\bar{n}}{kn - ml} \\ \dfrac{k\bar{m} - \bar{k}m}{kn - ml} & \dfrac{k\bar{n} - m\bar{l}}{kn - ml} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

или

$$(kn - lm)\lambda^2 - (\bar{k}n - \bar{m}l + k\bar{n} - m\bar{l})\lambda + \bar{k}\bar{n} - \bar{l}\bar{m} = 0. \quad (8)$$

Предположим, что мы нашли корни этого уравнения λ_1 и λ_2. Тогда числа

$$\alpha = \frac{\log \lambda_1}{2\pi i}, \quad \alpha' = \frac{\log \lambda_2}{2\pi i}, \quad (9)$$

определенные пока с точностью до целых слагаемых, будут показателями двух функций U и V, имеющих вид

$$\left.\begin{aligned} U &= t^{\alpha}(a_0 + a_1 t + \ldots), \\ V &= t^{\alpha'}(b_0 + b_1 t + \ldots). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Для упрощения рассуждений мы ограничиваемся лишь случаем, когда разность $\alpha' - \alpha$ не есть целое число.

Функции U и V представляют систему канонических фундаментальных решений линейного уравнения второго порядка; Z и F являются линейными комбинациями этих функций:

$$\left.\begin{aligned} Z &= AU + BV, \\ F &= CU + DV, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, подлежащие определению

Прежде всего выясним вопрос, в каком случае α и α' будут вещественными числами. Если окружности вида (3), соответствующие отрезкам A_3A_1 и A_1A_2, пересекаются, то угол между ними равен разности показателей $\alpha-\alpha'$, и следовательно в случае пересечения окружностей $\alpha-\alpha'$ должно быть вещественным. Тогда отношение корней определяющего уравнения

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=e^{2\pi i(\alpha-\alpha')}$$

должно быть по модулю равным единице. Но уравнение (8) имеет вид

$$a\lambda^2-b\lambda+\bar{a}=0,$$

где b вещественно, a и $\bar{a}$ комплексные сопряженные числа, откуда

$$\lambda_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4a\bar{a}}}{2a},$$

и следовательно

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{b+\sqrt{b^2-4a\bar{a}}}{b-\sqrt{b^2-4a\bar{a}}}.$$

Для того чтобы $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|=1$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$b^2-4a\bar{a}\leqslant 0$$

или

$$(\bar{k}n+k\bar{n}-\bar{m}l-m\bar{l})^2-4(kn-lm)(\bar{k}\bar{n}-\bar{l}\bar{m})\leqslant 0. \qquad (12)$$

Это условие совпадает с условием, что окружности

$$I\left(\frac{k+l\zeta}{m+n\zeta}\right)=0 \quad \text{и} \quad I(\zeta)=0$$

пересекаются. Действительно, в последнем случае мы имеем, что координаты точек пересечения являются корнями уравнения

$$\zeta^2+\frac{l\bar{m}-\bar{k}n+k\bar{n}-\bar{l}m}{l\bar{n}-\bar{l}n}\zeta+\frac{k\bar{m}-\bar{k}m}{l\bar{n}-\bar{l}n}=0,$$

а эти корни вещественны при условии

$$(\bar{k}n-k\bar{n}+\bar{l}m-l\bar{m})^2-4(k\bar{m}-\bar{k}m)(l\bar{n}-\bar{l}n)\leqslant 0. \qquad (13)$$

Нетрудно убедиться в тождественности условий (12) и (13).

Далее, легко видеть, что из вещественности разности $\alpha-\alpha'$ вытекает вещественность α и α'. Это следует из того, что произведение корней $\lambda_1\lambda_2=\frac{\bar{a}}{a}$ по модулю всегда равно единице. Мы будем предполагать в дальнейшем, что показатели около каждой из особых точек A_1, A_2, A_3 вещественны.

Для вычисления коэффициентов A, B, C, D в конкретной задаче можно обратиться к рассмотрению того треугольника на плоскости

комплексного переменного ζ, который соответствует данной задаче. А именно, по формулам (11) имеем:

$$\zeta = \frac{F}{Z} = \frac{CU + DV}{AU + BV}.$$

Подставим в правую часть этого уравнения последовательно $t = 0, 1, \infty$, а в левую — координаты соответствующих вершин треугольника: $\zeta = \zeta_0, \zeta_1, \zeta_\infty$; получим три уравнения, из которых сможем определить отношения трех из чисел A, B, C, D к четвертому, после чего следует проверить выполнимость условий на отрезках. Однако, при решении ряда задач нет надобности в построении треугольника. Кроме того, так как излагаемый метод распространяется на любое число особых точек, когда вместо треугольника получается многоугольник, построение этого многоугольника может оказаться затруднительным. Поэтому я излагаю здесь способ определения постоянных, основанный на непосредственном рассмотрении условий на отрезках.

Обращаясь к такому решению нашей задачи, заметим прежде всего, что числа A, B, C, D в формулах (11) вещественны, так как, по условию, Z и F сохраняют вещественные значения в промежутке $(0, 1)$, и с другой стороны, коэффициенты рядов (10) также вещественны при $0 < t < 1$.

Для нахождения величин A, B, C, D (они могут быть определены лишь с точностью до постоянного множителя) подставим выражения (11) в формулы (6). Получим

$$\left.\begin{aligned} Z^* &= \left(\frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} A + \frac{\bar{l}n - l\bar{n}}{kn - ml} C\right) U + \left(\frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} B + \frac{\bar{l}n - l\bar{n}}{kn - ml} D\right) V, \\ F^* &= \left(\frac{k\bar{m} - \bar{k}m}{kn - ml} A + \frac{k\bar{n} - m\bar{l}}{kn - ml} C\right) U + \left(\frac{k\bar{m} + \bar{k}m}{kn - ml} B + \frac{k\bar{n} - m\bar{l}}{kn - ml} D\right) V. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

С другой стороны, очевидно, что при обходе в положительном направлении вокруг особой точки $t = 0$ функции U и V приобретают соответственно множители $e^{2\pi i a}$ и $e^{2\pi i a'}$. Поэтому для Z^* и F^* имеем другие выражения, получаемые из формул (11):

$$\left.\begin{aligned} Z^* &= Ae^{2\pi i a} U + Be^{2\pi i a'} V, \\ F^* &= Ce^{2\pi i a} U + De^{2\pi i a'} V. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Сравнивая формулы (14) и (15), получаем для A и C систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} - e^{2\pi i a}\right) A + \frac{\bar{l}n - l\bar{n}}{kn - ml} C = 0, \\ &\frac{k\bar{m} - \bar{k}m}{kn - ml} A + \left(\frac{k\bar{n} - m\bar{l}}{kn - ml} - e^{2\pi i a}\right) C = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Эти уравнения совместны, так как определитель системы тождественно равен нулю, ибо $e^{2\pi i a}$ есть корень уравнения (7). Поэтому из (16) найдем $\frac{C}{A}$. Так как для B и D мы имеем ту же систему уравнений

(16), где α заменено на α', то сможем найти отношение $\frac{D}{B}$. А именно, полагая

$$\frac{C}{A}=\mu,\ \frac{D}{B}=\nu, \tag{17}$$

получим *

$$\left.\begin{aligned} \mu &= -\frac{\bar{k}n-\bar{m}l-(kn-ml)\,e^{2\pi i\alpha}}{\bar{l}n-l\bar{n}} = -\frac{k\bar{m}-\bar{k}m}{k\bar{n}-m\bar{l}-(kn-lm)\,e^{2\pi i\alpha}}, \\ \nu &= -\frac{\bar{k}n-\bar{m}l-(kn-ml)\,e^{2\pi i\alpha'}}{\bar{l}n-l\bar{n}} = -\frac{k\bar{m}-\bar{k}m}{k\bar{n}-m\bar{l}-(kn-lm)\,e^{2\pi i\alpha'}}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(так как, по условию, $\alpha'-\alpha$ не целое, то $\mu\neq\nu$). Теперь можем написать

$$\left.\begin{aligned} Z &= AU+BV, \\ F &= A\mu U+B\nu V. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

§ 2

Нам остается еще определить отношение коэффициентов A и B. Для того чтобы показать возможность этого определения, мы подвергнем условия на отрезках дальнейшим преобразованиям, заменяя функции Z и F другими функциями, а именно:

1. Умножая первое из уравнений (19) один раз на ν, другой раз на μ и вычитая из него второе из уравнений (19), получим

$$\left.\begin{aligned} \nu Z-F &= A(\nu-\mu)\,U, \\ \mu Z-F &= B(\mu-\nu)\,V. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Так как μ и ν вещественны, то, полагая

$$\nu Z-F=Z_1,\ \mu Z-F=F_1, \tag{21}$$

получим, что для $0<t<1$

$$I(Z_1)=I(F_1)=0, \tag{22}$$

т. е. условия на отрезке $(0,1)$ остаются прежними. Теперь Z_1 и F_1 оказываются просто пропорциональными U и V:

$$Z_1=A'U,\ F_1=B'V, \tag{23}$$

где

$$A'=(\nu-\mu)\,A,\ B'=(\mu-\nu)\,B. \tag{24}$$

Так как при $t<0$, U и V принимают соответственно вид $e^{\pi i\alpha}U'$, $e^{\pi i\alpha'}V'$, где U' и V' вещественны при $t<0$, то для Z_1 и F_1 при $t<0$ имеем такие условия:

$$I(Z_1e^{-\pi i\alpha})=0,\ I(F_1e^{-\pi i\alpha'})=0. \tag{25}$$

---

* Если в (8) подставить $\lambda=e^{2\pi i\alpha}$ и умножить его на $e^{-2\pi i\alpha}$, то получим тождество:

$$(kn-lm)\,e^{2\pi i\alpha}-(\bar{k}n-\bar{m}l+k\bar{n}-m\bar{l})+(\bar{k}\bar{n}-\bar{l}\bar{m})\,e^{-2\pi i\alpha}=0.$$

Отсюда для μ получаем другое выражение, сопряженное с первым из написанных в формулах (18), а это означает, что μ (а также и ν) вещественны.

2. Для получения последнего возможного упрощения условий при $t<0$ заменим функции Z_1 и F_1 новыми функциями Z_2 и F_2 с помощью равенств:

$$Z_1 = t^\alpha (1-t)^\beta Z_2,$$
$$F_1 = t^\alpha (1-t)^\beta F_2.$$

Функции Z_2 и F_2 принадлежат показателям 0 и $\alpha'-\alpha$ около $t=0$, и показателям 0 и $\beta'-\beta$ около $t=1$. Будем считать, для упрощения письма, что эти показатели суть соответственно $(\alpha, 0)$ и $(\beta, 0)$. Тогда вместо условий (25) для функций Z_2 и F_2 будем иметь

$$I(F_2)=0,\ I(Z_2 e^{-\pi i\alpha})=0 \quad \text{при} \quad t<0. \tag{26}$$

Условия (22) сохраняются:

$$I(Z_2)=I(F_2)=0 \quad \text{при} \quad 0<t<1. \tag{27}$$

Теперь функции Z_2 и F_2 выбраны нами так, что условия на отрезках A_3A_1 и A_1A_2 можно считать приведенными к каноническому виду.

3. Предположим теперь, что для Z_2 и F_2 условия на третьем отрезке, $t>1$, имеют вид

$$I(KZ_2+LF_2)=0, \quad I(MZ_2+NF_2)=0, \tag{28}$$

где K, L, M, N — комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\begin{vmatrix} K & L \\ M & N \end{vmatrix} \neq 0 \tag{29}$$

(при выполнении условий (2) условие (29) имеет место). Мы не можем больше менять функции Z_2 и F_2 без того, чтобы не изменились (26) и (27). Воспользуемся теперь тем, что уравнения (28) можно умножать на вещественные числа и составлять из них линейные комбинации. Например из (28) вытекает, что

$$I[(aK+bM)Z_2+(aL+bN)F_2]=0 \tag{30}$$

при любых вещественных a и b. Полагая

$$K=k'+ik'',\ L=l'+il'',\ M=m'+im'',\ N=n'+in'',$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} aK+bM &= ak'+bm'+i(ak''+bm''), \\ aL+bN &= al'+bn'+i(al''+bn''). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Прежде чем перейти к подбору a и b, отметим условия, которые налагает на коэффициенты K, L, M, N требование, что характеристическое уравнение около $t=1$ имеет корни 1 и $e^{2\pi i\beta}$. Это характеристическое уравнение имеет вид, аналогичный (8), с той разницей, что черта (знак сопряжения) будет стоять на других буквах:

$$(\overline{K}\overline{N}-\overline{L}\overline{M})\lambda^2-(\overline{K}N+K\overline{N}-\overline{M}L-M\overline{L})\lambda+KN-LM=0.$$

Условия, что $\lambda=1$ и $\lambda=e^{2\pi i\beta}$ суть корни, дают

$$\frac{K-\overline{K}}{L-\overline{L}}=\frac{M-\overline{M}}{N-\overline{N}},\quad e^{2\pi i\beta}=\frac{KN-LM}{\overline{K}\overline{N}-\overline{L}\overline{M}}. \tag{32}$$

Первое из равенств (32) равносильно такому:

$$\frac{k''}{l''}=\frac{m''}{n''}, \tag{32'}$$

что дает возможность уничтожить мнимые части в равенствах (31). Действительно, 1) если ни одно из чисел k'', l'', m'', n'' не равно нулю, то можно выбрать a и b так, чтобы $ak''+bm''=0$, $al''+bn''=0$; 2) если $k''=0$, $m''\neq 0$, то $l''=0$ и первое из уравнений (28) уже имеет вещественные коэффициенты; 3) если $k''\neq 0$, $m''=0$, то $n''=0$ и второе из уравнений (28) имеет вещественные коэффициенты.

Таким образом всегда можно получить одно из условий с вещественными коэффициентами. Будем поэтому считать, что K и L уже вещественны. Хоть одно из них должно быть отлично от нуля. Положим сначала $K\neq 0$. Тогда, обозначив

$$\frac{L}{K}=P,$$

причем P вещественно, приведем одно из условий (28) к виду

$$I(Z_2+PF_2)=0 \quad \text{при } t>1. \tag{33}$$

Присоединим к этому уравнению одно из уравнений (28), например второе:

$$I(MZ_2+NF_2)=0 \quad \text{при } \quad t>1. \tag{34}$$

Характеристическое уравнение для (33) и (34) имеет вид

$$(\overline{N}-P\overline{M})\lambda^2-(N+\overline{N}-\overline{M}P-MP)\lambda+N-PM=0.$$

При $\lambda=1$ получаем тождество. Составляя произведение корней, имеем:

$$e^{2\pi i\beta}=\frac{N-PM}{\overline{N}-P\overline{M}},$$

что можно переписать так:

$$\frac{\cos\pi\beta+i\sin\pi\beta}{\cos\pi\beta-i\sin\pi\beta}=\frac{n'-Pm'+i(n''-Pm'')}{n'-Pm'-i(n''-Pm'')};$$

n'' и m'' не могут одновременно равняться нулю, так как, по нашему условию, β не есть целое число. Предположим для определенности, что $m''\neq 0$ и перепишем уравнения (33) и (34) в виде:

$$I(Z_2+PF_2)=0, \tag{33}$$

$$I[(m'+im'')Z_2+(n'+in'')F_2]=0. \tag{34'}$$

Если $m' \neq 0$, то умножим первое уравнение на m' и вычтем из второго. Тогда коэффициент при Z_2 будет чисто мнимым, и, после разделения на m'', новое условие можно представить в виде

$$I(iZ_2 + QF_2) = 0, \tag{35}$$

где $Q = Q' + iQ''$, вообще говоря, комплексное. Если $m' = 0$, то (34′) легко приводится к виду (35).

Если $m'' = 0$, то $n'' \neq 0$, и при $P \neq 0$ можно сделать так, чтобы при F_2 коэффициент стал равным i.

Если, при $m'' = 0$, $P = 0$, то

$$e^{2\pi i\beta} = \frac{N}{\overline{N}},$$

и можно нормировать M и N так, чтобы $N = n' + in'' = e^{\pi i\beta}$ и соотношения (34′) и (33) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} I(m'Z_2 + e^{\pi i\beta}F_2) = 0,\\ I(Z_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Возвращаясь к (25) и (27), которые можно было бы уже считать простейшими уравнениями, проделаем последнее преобразование, умножив (33) на $\cos\pi\beta$, (35) на $\sin\pi\beta$ и сложив их; получим:

$$I[e^{\pi i\beta}Z_2 + (P\cos\pi\beta + Q'\sin\pi\beta + iQ''\sin\pi\beta)F_2] = 0. \tag{37}$$

Но P, Q' и Q'' связаны с β определенным соотношением, вытекающим из второго равенства (24), где $K = 1$, $L = P$, $M = i$, $N = Q$;

$$e^{2\pi i\beta} = \frac{Q - Pi}{\overline{Q} - Pi} = \frac{Q' + i(Q'' - P)}{Q' - i(Q'' - P)}.$$

Из него вытекает, что

$$\operatorname{tg}\pi\beta = \frac{e^{2\pi i\beta} - 1}{i(e^{2\pi i\beta} + 1)} = \frac{Q'' - P}{Q'}$$

и далее

$$Q'\sin\pi\beta = (Q'' - P)\cos\pi\beta.$$

Вследствие этого равенство (37) можно переписать в виде

$$I[e^{\pi i\beta}(Z_2 + Q''F_2)] = 0, \tag{38}$$

где Q'' вещественно.

Уравнения (38) и (33), которое мы здесь перепишем,

$$I(Z_2 + PF_2) = 0,$$

представляют каноническую форму условий на отрезках. При $m'' = P = 0$ эти уравнения заменяются уравнениями (28).

Вернемся теперь к случаю $K = 0$. Нетрудно видеть, что здесь получим или $I(F_2) = I(MZ_2 + iF_2) = 0$ или $I(F_2) = I(MZ_2) = 0$, где M — комплексное.

Таким образом, условия (1) на трех отрезках вещественной оси, при выполнении соотношения (2) и в случае, когда все показатели α, α', β, β', γ, γ' вещественны, и $\alpha'-\alpha$, $\beta'-\beta$, $\gamma'-\gamma \neq 0$, с помощью замены функций Z и F функциями Z_2 и F_2 можно привести к одной из трех форм:

I. на отрезке A_3A_1 $\quad I(Z_2 e^{-\pi i\alpha}) = I(F_2) = 0$,
» » A_1A_2 $\quad I(Z_2) = I(F_2) = 0$,
» » A_2A_3 $\quad I(Z_2 + PF_2) = I[e^{\pi i\beta}(Z_2 + QF_2)] = 0$,

где P и Q вещественны;

II. на отрезках A_3A_1, A_1A_2 имеют место те же условия, на A_2A_3 условие $I(Z_2) = I(MZ_2 + e^{\pi i\beta}F_2) = 0$, где M вещественно;

III. на отрезке A_2A_3 $I(F_2) = I(MZ_2 + NiF_2) = 0$, M — комплексное, N — вещественное.

Эти канонические формы допускают следующую геометрическую интерпретацию: три пересекающиеся окружности с углами, отличными от нуля, с помощью дробно-линейного преобразования могут быть превращены в треугольник, две стороны которого прямолинейны (одна из них совпадает с осью OX), а третья представляет окружность. В дальнейшем мы оставляем случай прямолинейного треугольника в стороне по той причине, что в этом случае решение задачи упрощается: оно получается в квадратурах, не содержащих гипергеометрических функций под знаком интегралов. Действительно, углы треугольника суть $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi(\gamma-\gamma')$, их сумма должна равняться π, т. е. $\alpha+\beta+\gamma-\gamma'=1$. Но по уравнению Фукса

$$\alpha+\beta+\gamma+\gamma'=1,$$

откуда $\gamma'=0$, и гипергеометрическое уравнение принимает вид неполного уравнения:

$$Y + \left(\frac{1-\alpha}{t} + \frac{1-\beta}{t-1}\right)Y' = 0.$$

Если мы найдем функции Z_2 и F_2, то по ним сможем найти Z_1 и F_1, а затем Z и F.

Остается показать возможность отыскания отношения A' к B'.

§ 3

Вернемся теперь к уравнениям (23), причем будем рассматривать вместо Z и F функции Z_2 и F_2, и следовательно будем считать, что U и V принадлежат показателям 0 и α. Допустим, что на основании некоторых дополнительных данных мы определили α однозначно (что должно иметь место в физических задачах).

Если мы знаем показатели $(0, \beta)$ около $t=1$ и (γ, γ') около $t=\infty$, то

$$\alpha+\beta+\gamma+\gamma'=1$$

(если это соотношение Фукса не выполняется, то все три особые точки не могут быть регулярными, т. е. ряды около особых точек содержат ряд Лорана).

Z_2 и F_2 суть линейные комбинации фундаментальных решений гипергеометрического уравнения

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{t} + \frac{1-\beta}{t-1}\right) Y' + \frac{\gamma\gamma' Y}{t(t-1)} = 0.$$

Его линейно независимые интегралы около $t=0$ были нами обозначены через U и V. Положим, что около $t=1$ имеем систему решений:

$$U_1 = (1-t)^\beta (a_0 + a_1 (t-1) + \ldots),$$
$$V_1 = b_0 + b_1 (t-1) + b_2 (t-1)^2 + \ldots$$

Тогда с помощью промежуточной подстановки мы можем перейти от U, V к U_1, V_1:

$$\left.\begin{aligned} U &= pU_1 + qV_1, \\ V &= rU_1 + sV_1. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Здесь p, q, r, s — вещественны, так как для $0 < t < 1$ U, V, U_1, V_1 вещественны. Для Z_2 и F_2 получим, полагая

$$Z_2 = A'U, \quad F_2 = B'V$$

и подставляя сюда (39):

$$Z_2 = A'pU_1 + A'qV_1,$$
$$F_2 = B'rU_1 + B'sV_1.$$

При переходе с отрезка A_1A_2 на отрезок A_2A_3 мы обойдем точку $t=1$ по полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости. При этом V_1 будет оставаться вещественным; U_1 можно представить в виде

$$U_1 = e^{-\pi i\beta} U_1',$$

где U_1' вещественно (так как при $t>1$ $(1-t)^\beta = e^{-\pi i\beta}(t-1)^\beta$). Поэтому при $t > 1$ будем иметь

$$\left.\begin{aligned} Z_2 &= A'pe^{-\pi i\beta} U_1' + A'qV_1, \\ F_2 &= B're^{-\pi i\beta} U_1' + B'sV_1. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Умножим первое из этих уравнений на $B'r$, второе на $A'p$ и вычтем получим

$$B'rZ_2 - A'pF_2 = A'B'(qr - ps) V_1.$$

Если существуют отличные от нуля значения A' и B', то отсюда вытекает, что $I(B'rZ_2 - A'pF_2) = 0$, или, при

$$-\frac{A'p}{B'r} = \sigma\,^*, \qquad (41)$$

* Можно показать, что r и s отличны от нуля, если окружность, являющаяся границей треугольника, не проходит через начало координат или не вырождается в прямую.

$$I(Z_2+\sigma F_2)=0. \tag{42}$$

Аналогично, умножая первое из уравнений (40) на $B's$, второе на $A'q$, вычитая и умножая на $e^{\pi i\beta}$, получим

$$I\left[e^{\pi i\beta}(Z_2+\tau F_2)\right]=0, \tag{43}$$

где

$$\tau=-\frac{A'q}{B's}{}^{*}. \tag{44}$$

Уравнения (41) и (44), рассматриваемые как уравнения для $\frac{A'}{B'}$, должны быть совместными, для чего необходимо выполнение равенства

$$\frac{ps}{qr}=\frac{\sigma}{\tau}. \tag{45}$$

Очевидно, что уравнения (42) и (43) совпадают с последними из уравнений случая I (§ 2), причем $\sigma=P$, $\tau=Q$.

Случай II соответствует $s=0$. Ради краткости мы его рассматривать не будем.

Чтобы показать, что равенство (45) всегда имеет место, напишем, с одной стороны, выражение для $\frac{ps}{qr}$, с другой стороны, найдем $\frac{\sigma}{\tau}$. Из теории гипергеометрического уравнения известно, что если показатели около особых точек $t=0,\ 1,\ \infty$ суть соответственно (α,α'), (β,β') (γ,γ'), то *

$$\frac{ps}{qr}=\frac{\sin\pi(\alpha+\beta'+\gamma')\sin\pi(\alpha'+\beta+\gamma')}{\sin\pi(\alpha'+\beta'+\gamma')\sin\pi(\alpha+\beta+\gamma')}.$$

При $\alpha'=\beta'=0$ имеем

$$\frac{ps}{qr}=\frac{\sin\pi(\alpha+\gamma')\sin\pi(\beta+\gamma')}{\sin\pi\gamma\cdot\sin\pi\gamma'}. \tag{46}$$

Чтобы найти $\frac{\sigma}{\tau}$ в функции от показателей, составим определяющее уравнение около $t=\infty$. Беря обозначения равенства (1), имеем

$$\begin{aligned}
k_1&=1, & l_1&=\sigma,\\
m_1&=e^{\pi i\beta}, & n_1&=\tau e^{\pi i\beta},\\
k_2&=e^{-\pi i\beta}, & l_2&=0,\\
m_2&=0, & n_2&=1.
\end{aligned}$$

Ниже в формуле (51) мы имеем сравнительно простую форму характеристического уравнения. Воспользовавшись ею, получим

$$\lambda^2(\tau-\sigma)e^{\pi i(\alpha+\beta)}-\lambda\left[\tau\left(e^{\pi i(\alpha-\beta)}+e^{-\pi i(\alpha-\beta)}\right)-\sigma\left(e^{\pi i(\alpha+\beta)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\right)\right]+(\tau-\sigma)e^{-\pi i(\alpha+\beta)}=0. \tag{47}$$

Корни уравнения (47) должны быть равными $e^{2\pi i\gamma}$ и $e^{2\pi i\gamma'}$.

По свойству корней квадратного уравнения имеем

$$e^{2\pi i\gamma}+e^{2\pi i\gamma'}=\frac{2\left[\tau\cos\pi(\alpha-\beta)-\sigma\cos\pi(\alpha+\beta)\right]e^{-\pi i(\alpha+\beta)}}{\tau-\sigma},$$

* Picard E., Traité d'analyse, t. III, 1896, p. 298.

или, на основании соотношения Фукса,

$$\cos \pi (\gamma - \gamma') = \frac{\tau \cos \pi (\alpha - \beta) - \sigma \cos \pi (\alpha + \beta)}{\tau - \sigma},$$

откуда

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\cos \pi (\gamma - \gamma') - \cos \pi (\alpha - \beta)}{\cos \pi (\gamma - \gamma') - \cos \pi (\alpha + \beta)}. \qquad (48)$$

Выражение, стоящее в правой части (48), как нетрудно убедиться, совпадает с выражением (46).

Итак, отношение A' к B' мы можем найти. Решение для Z и F будет содержать произвольный множитель. Этот множитель в конкретной задаче должен определяться из дополнительного условия. Так, в задаче о грунтовых водах мы должны иметь заданную длину в области движения.

§ 4

В заключение приведем другой вывод характеристического уравнения, который дает достаточно простой вид этого уравнения при самых общих выражениях условий (2), в то время как характеристическое уравнение, составленное по уравнениям (4), имеет очень громоздкий вид*. Выпишем условие (1) для двух смежных отрезков, например A_3A_1 и A_1A_2:

на отрезке A_3A_1 $\quad I(k_1Z + l_1F) = I(m_1Z + n_1F) = 0,$

» » A_1A_2 $\quad I(k_2Z + l_2F) = I(m_2Z + n_2F) = 0.$

Положим, что в промежутке (0, 1) функции Z и F имеют вид

$$Z = AU + BV, \quad F = CU + DV,$$

где U и V — канонические фундаментальные решения уравнения класса Фукса

$$U = t^{\alpha}(a_0 + a_1 t + \ldots),$$
$$V = t^{\alpha'}(b_0 + b_1 t + \ldots)$$

($\alpha' - \alpha$ не есть целое число). Если все показатели уравнения вещественны (что мы считаем выполненным в нашей задаче), то коэффициенты рядов для U и V вещественны. Числа A, B, C, D будут теперь комплексными. Первое из условий на отрезке A_1A_2 можем написать так:

$$I(k_2Z + l_2F) = I[(k_2A + l_2C)U + (k_2B + l_2D)V] =$$
$$= UI(k_2A + l_2C) + VI(k_2B + l_2D) = 0.$$

Так как U и V линейно независимы, то коэффициенты при них должны равняться нулю:

$$I(k_2A + l_2C) = 0, \quad I(k_2B + l_2D) = 0.$$

---

* Зато для вывода подстановки (4) не требовалось предположения о вещественности α и α'.

Таким же образом находим еще два уравнения:

$$I(m_2A+n_2C)=0, \quad I(m_2B+n_2D)=0.$$

Перейдем теперь на отрезок A_3A_1, совершив обход около точки $t=0$ по полуокружности в верхней полуплоскости. Если на отрезке $(0,1)$ будем считать $\arg t=0$, то в промежутке $(-\infty, 0)$ $\arg t=\pi$, а потому при $t<0$

$$t^{\alpha}=|t|^{\alpha}e^{\pi i\alpha},$$
$$t^{\alpha'}=|t|^{\alpha'}e^{\pi i\alpha'}.$$

Если для $t<0$ положить

$$U=e^{\pi i\alpha}U', \quad V=e^{\pi i\alpha'}V',$$

то U' и V' будут вещественны при $t<0$. Поэтому на отрезке A_3A_1 имеем:

$$I(k_1Z+l_1F)=I[(k_1A+l_1C)U+(k_1B+l_1D)V]=$$
$$=I[(k_1A+l_1C)e^{\pi i\alpha}U'+(k_1B+l_1D)e^{\pi i\alpha'}V']=0,$$

откуда следуют равенства

$$I[(k_1A+l_1C)e^{\pi i\alpha}]=0, \quad I[(k_1B+l_1D)e^{\pi i\alpha'}]=0.$$

Аналогично

$$I[(m_1A+n_1C)e^{\pi i\alpha}]=0, \quad I[(m_1B+n_1D)e^{\pi i\alpha'}]=0.$$

Полученные восемь уравнений для A, B, C, D распадаются на две группы, в одну из которых входят A и C, в другую — B и D. Перепишем эти уравнения, вводя сопряженные комплексные числа (так, $\overline{A}$ сопряженное с A, и т. д.):

$$\left.\begin{aligned}
&k_2A+l_2C-\overline{k}_2\overline{A}-\overline{l}_2\overline{C}=0,\\
&m_2A+n_2C-\overline{m}_2\overline{A}-\overline{n}_2\overline{C}=0,\\
&(k_1A+l_1C)e^{2\pi i\alpha}-\overline{k}_1\overline{A}-\overline{l}_1\overline{C}=0,\\
&(m_1A+n_1C)e^{2\pi i\alpha}-\overline{m}_1\overline{A}-\overline{n}_1\overline{C}=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

$$\left.\begin{aligned}
&k_2B+l_2D-\overline{k}_2\overline{B}-\overline{l}_2\overline{D}=0,\\
&m_2B+n_2D-\overline{m}_2\overline{B}-\overline{n}_2\overline{D}=0,\\
&(k_1B+l_1D)e^{2\pi i\alpha'}-\overline{k}_1\overline{B}-\overline{l}_1\overline{D}=0,\\
&(m_1B+n_1D)e^{2\pi i\alpha'}-\overline{m}_1\overline{B}-\overline{n}_1\overline{D}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Для того чтобы система (49) имела отличные от нуля решения, необходимо равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix}
k_1e^{2\pi i\alpha} & l_1e^{2\pi i\alpha} & \overline{k}_1 & \overline{l}_1\\
m_1e^{2\pi i\alpha} & n_1e^{2\pi i\alpha} & \overline{m}_1 & \overline{n}_1\\
k_2 & l_2 & \overline{k}_2 & \overline{l}_2\\
m_2 & n_2 & \overline{m}_2 & \overline{n}_2
\end{vmatrix}=0.$$

Если в этом определителе заменить $e^{2\pi i\alpha}$ на $e^{2\pi i\alpha'}$, то получим условие того, что система (50) имеет для B и D решения, не равные нулю.

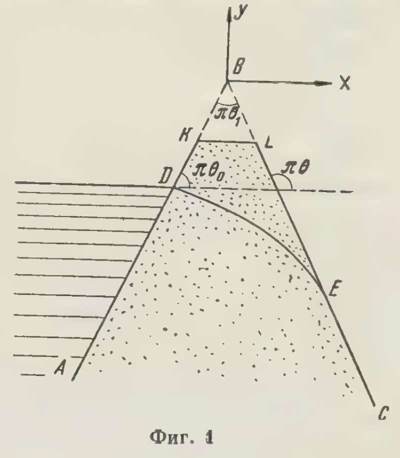
Это показывает, что $e^{2\pi i\alpha}$ и $e^{2\pi i\alpha'}$ являются корнями уравнения второй степени относительно λ:

$$\begin{vmatrix} k_1\lambda & l_1\lambda & \bar{k}_1 & \bar{l}_1 \\ m_1\lambda & n_1\lambda & \bar{m}_1 & \bar{n}_1 \\ k_2 & l_2 & \bar{k}_2 & \bar{l}_2 \\ m_2 & n_2 & \bar{m}_2 & \bar{n}_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{51}$$

Хотя при выводе мы пользовались условием вещественности α и α', однако уравнение (51) годится и для случая комплексных α и α'. Производя циклическую перестановку значков 1, 2, 3, мы получим еще два характеристических уравнения: около $t=1$ и $t=\infty$. Для того чтобы вычислить A, B, C, D, следует в уравнениях (49) и (50) отделить вещественную и мнимую части. При этом мы сможем найти лишь отношение восьми вещественных чисел к двум из них. Для нахождения отношения остающейся пары чисел следует, заменив функции U и V системой фундаментальных решений U_1 и V_1 около $t=1$ (по формулам (39)), перейти затем к условиям на отрезке A_2A_3. Из четырех уравнений, которые при этом получатся, два выполняются тождественно, два же являются совместными однородными уравнениями Это дает возможность найти искомое отношение.

§ 5

В качестве примера применения изложенной теории я рассмотрю задачу, указанную мне Б. К. Ризенкампфом и удобную с точки зрения применения изложенного выше метода, так как здесь имеется три особых точки.



Фиг. 1

Пусть мы имеем плотину бесконечной длины и глубины с одним бьефом. Поперечное сечение ее $AKLC$ изображено на фиг. 1. Будем считать, как это обычно делают, скорости малыми, сопротивление удовлетворяющим закону Дарси, а движение установившимся. Тогда, как известно [1], на границе водной поверхности AD потенциал скорости φ имеет постоянное значение. Вдоль линии свободной поверхности DE функция тока ψ является постоянной и кроме того выполняется уравнение

$$\varphi + ky = \text{const},$$

которое получается из условия постоянства давления вдоль свободной поверхности (k — коэффициент фильтрации). На промежутке высачивания EC также имеем условие $\varphi + ky = \text{const}$.

Присоединяя к этим условиям еще уравнения границ AD и EC, получим

$$\left.\begin{array}{lll} \text{на границе } AD & y\cos\theta_0 - x\sin\theta_0 = \text{const}, \\ & \varphi = \text{const}, \\ \text{на линии } DE & \psi = \text{const}, \\ & \varphi + ky = \text{const}, \\ \text{на линии } EC & y\cos\theta - x\sin\theta = \text{const}, \\ & \varphi + ky = \text{const}. \end{array}\right\} \qquad (a)$$

Отобразим конформно область $ADEC$ плоскости комплексного переменного z на верхнюю полуплоскость плоскости вспомогательного комплексного переменного t (фиг. 2). Будем рассматривать в качестве

C $J(Ze^{-\pi i\theta})=0$ E $J(F)=0$ D $J(Ze^{-\pi i\theta_0})=0$ A

$-\infty$ $J(kZ+iF)=0$ 0 $J(kZ+iF)=0$ 1 $J(iF)=0$ ∞

Фиг. 2

функций Z и F производные по t от комплексной координаты z и от комплексного потенциала $f=\varphi+i\psi$, так что

$$Z=\frac{dz}{dt}, \quad F=\frac{df}{dt}.$$

Так как t вещественно вдоль границ области движения, то мы можем дифференцировать уравнения (a) по t. Нетрудно видеть, что условия (a) могут быть заменены условиями, выписанными на отрезках CE, ED и DA (фиг. 2). По физическому смыслу задачи Z и F могут иметь лишь регулярные особенности в точках $t=0$, $t=1$, $t=\infty$.

Поэтому мы можем применить рассуждения § 1. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\pi\theta_1 < \frac{\pi}{2}$. Прежде всего составим характеристические уравнения около особых точек, пользуясь уравнением (51). При $t=0$ имеем

$$\begin{vmatrix} e^{-i\theta}\lambda & 0 & e^{i\theta} & 0 \\ k\lambda & i\lambda & k & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & i & k & -i \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения суть

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -e^{2i\theta}.$$

При $t=1$ характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 & 1 \\ k\lambda & i\lambda & k & -i \\ e^{-i\theta_0} & 0 & e^{i\theta_0} & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = e^{-2i\theta_0}.$$

Наконец, при $t = \infty$ корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} e^{-i\theta_0}\lambda & 0 & e^{i\theta_0} & 0 \\ 0 & i\lambda & 0 & -i \\ e^{-i\theta} & 0 & i^{i\theta} & 0 \\ k & i & k & -i \end{vmatrix} = 0$$

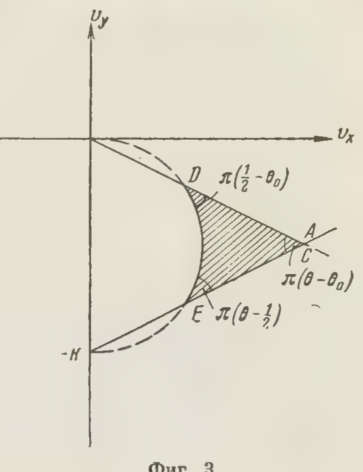
будут

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = e^{2i(\theta_0 - \theta)}.$$

При нахождении показателей $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ может оказаться полезным рассмотрение области, соответствующей нашей задаче, на плоскости комплексного переменного $\zeta = \frac{F}{Z}$. В данной задаче ζ представляет комплексную скорость:

$$\frac{F}{Z} = \frac{df}{dz} = v_x - iv_y,$$

где v_x и v_y суть проекции скорости на оси x и y. Мы построим соответствующий график на плоскости (v_x, v_y), а не $(v_x, -v_y)$, так как нам нужны будут лишь абсолютные величины некоторых углов (фиг. 3). Способ построения описан в работе Девисона (¹). Угол в точке E, деленный на π, должен равняться разности $\alpha - \alpha'$; угол в точке D — разности $\beta - \beta'$ и угол в точке A — разности $\gamma - \gamma'$. Поэтому имеем



Фиг. 3

$$\alpha - \alpha' = \theta - \frac{1}{2}, \quad \beta - \beta' = \frac{1}{2} - \theta_0, \quad \gamma - \gamma' = \theta - \theta_0.$$

С другой стороны, так как

$$\alpha = \frac{\log \lambda_1}{2\pi i}, \quad \alpha' = \frac{\log \lambda_2}{2\pi i},$$

получаем

$$\alpha = k, \quad \alpha' = \theta - \frac{1}{2} + k,$$

где k — целое число. Точно так же

$$\beta' = -\frac{1}{2} + m, \quad \beta = -\theta_0 + m, \quad \gamma = l, \quad \gamma' = \theta_0 - \theta + l,$$

где m и l — целые.

Теперь используем то обстоятельство, что в точке D z и f должны быть конечными. Имеем

$$z = \int_1^t Z\,dt = z_1, \; f = \int_1^t F\,dt + f_1,$$

где $f_1 = \varphi_1 + i\psi$, $z_1 = x_1 + iy_1$ — значения f и z в точке D. Для того чтобы z и f были конечны, необходимо, чтобы интегралы

$$\int_1^t (t-1)^\beta \, dt \quad \text{и} \quad \int_1^t (t-1)^{\beta'} \, dt$$

были конечны, т. е. чтобы $\beta + 1$ и $\beta' + 1$ были не отрицательны. Это дает неравенства

$$\frac{1}{2} + m > 0, \quad m + 1 - \theta_0 > 0,$$

откуда

$$m > -\frac{1}{2},$$

а так как m целое, то

$$m \geqslant 0.$$

Таким образом должно быть

$$\beta \geqslant -\theta_0, \quad \beta' \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Аналогично найдем неравенства для α и α':

$$\alpha \geqslant 0, \quad \alpha' \geqslant -\frac{1}{2} + \theta.$$

Что касается точки $t = \infty$, то в ней z и f являются неограниченными, но можно оценить порядок бесконечности для z. Для этого можно отобразить конформно угол ABC на полуплоскость переменного t, так чтобы B перешла в точку $t = 0$, A — в точку $t = +\infty$, C в $t = -\infty$. Получим $z = at^{\theta - \theta_0}$. Поэтому, если возьмем $l = 1$, то получим как раз нужное значение для γ:

$$\gamma = \theta_0 - \theta + 1.$$

Действительно, тогда на бесконечности Z будет порядка

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta_0 - \theta + 1} = t^{\theta - \theta_0 - 1},$$

а

$$z = \int_\infty^t Z \, dt = O(t^{\theta - \theta_0}).$$

Если теперь в неравенствах для $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ взять знак равенства, то получим такую таблицу показателей:

$$\begin{array}{lll} t = 0, & \alpha = 0, & \alpha' = -\frac{1}{2} + \theta, \\ t = 1, & \gamma = -\frac{1}{2}; & \gamma' = -\theta_0, \\ t = \infty, & \beta = \theta_0 - \theta + 1, & \beta' = 1. \end{array}$$

Другого выбора показателей быть не может, так как сумма всех показателей должна равняться единице.

Построение решения можно теперь провести с помощью функции Римана

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \theta_0-\theta+1 & -\frac{1}{2} & t \\ \theta-\frac{1}{2} & 1 & -\theta_0 & \end{pmatrix}=(1-t)^{-\frac{1}{2}}P\begin{pmatrix} 0 & \theta_0-\theta+\frac{1}{2} & 0 & \\ & & & t \\ \theta-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\theta_0 & \end{pmatrix}.$$

Положим

$$a=\alpha+\beta+\gamma,\quad b=\alpha+\beta'+\gamma,\quad c=1+\alpha-\alpha'.$$

В нашем случае

$$a=\theta_0-\theta+\frac{1}{2},\quad b=1-\theta,\quad c=\frac{3}{2}-\theta.$$

Гипергеометрическое уравнение, которому удовлетворяет функция

$$P\begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma & t \end{pmatrix},$$

имеет вид

$$t(1-t)Y''+[c-(a+b+1)t]Y'-abY=0,$$

т. е

$$t(1-t)Y''+\left[\frac{3}{2}-\theta-(1+\theta_0-\theta)t\right]Y'-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\theta_0-\theta\right)Y=0.$$

В промежутке $(0, 1)$ возьмем, в качестве фундаментальной системы решений полученного уравнения, функции

$$F(a, b, c, t)=F\left(\theta_0-\theta+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}-\theta,\ t\right)=U,$$

$$t^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1,\ 2-c,\ t)=t^{\theta-\frac{1}{2}}F\left(1-\theta_0,\ 1-\theta,\ \frac{3}{2}-\theta,\ t\right)=V.$$

Тогда для Z и F будем иметь

$$Z=\frac{(A'+iA'')U+(B'+iB'')V}{\sqrt{1-t}};$$

$$F=\frac{CU-DV}{\sqrt{1-t}}.$$

C и D вещественны вследствие условия $I(F)=0$ для $0<t<1$. Условие на том же промежутке: $I(iF+kZ)=0$, дает

$$C=-kA'',\quad D=-kB''.$$

На отрезке $(-\infty, 0)$ $V=e^{\pi i\left(\theta-\frac{1}{2}\right)}V'$, где V' вещественно. Поэтому при $t=0$ удобно переписать Z и F:

$$Z=\frac{(A'+iA'')U-ie^{\pi i\theta}(B'+iB'')V}{\sqrt{1-t}},$$

$$F=\frac{-kA''U+kB''ie^{\pi i\theta}V'}{\sqrt{1-t}}.$$

Условие $I(Ze^{-\pi i\theta})=0$ приводит к уравнениям

$$I[(A'+iA'')e^{-\pi i\theta}]=0,\ I(iB'-B'')=0,$$

т. е.

$$A'=A''\operatorname{ctg}\pi\theta,\quad B'=0.$$

Перепишем теперь Z и F для промежутка $(0, 1)$:

$$Z=\frac{A''(\operatorname{ctg}\pi\theta+i)U+iB''V}{\sqrt{1-t}},$$

$$F=-\frac{k(A''U+B''V)}{\sqrt{1-t}},$$

и перейдем к окрестности точки $t=1$. Положим

$$U=pU_1+qV_1,$$
$$V=rU_1+sV_1,$$

где

$$U_1=F(a,\ b,\ a+b+1-c,\ 1-t)=F\left(\theta_0-\theta+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\theta_0,\ 1-t\right),$$
$$V_1=(1-t)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b,\ c+1-a-b,\ 1-t)=$$
$$=(1-t)^{\frac{1}{2}-\theta_0}F\left(1-\theta_0,\ 1-\theta,\ \frac{3}{2}-\theta_0,\ 1-t\right)=e^{-\pi i\left(\frac{1}{2}-\theta_0\right)}V_1'$$

(V_1' вещественно при $t>1$).

Получим

$$Z=\frac{[A''p(\operatorname{ctg}\pi\theta+i)+B''ir]U_1-i[A''q(\operatorname{ctg}\pi\theta+i)+B''is]e^{\pi i\theta}V_0'}{-i\sqrt{t-1}}.$$

Условие $I(iF)=0$ при $t>1$ выполняется автоматически. Условие $I(Ze^{-\pi i\theta_0})=0$ дает

$$I\{ie^{-\pi i\theta_0}[A''p\operatorname{ctg}\pi\theta+i(A''p+B''r)]\}=0,$$
$$I[A''q\operatorname{ctg}\pi\theta+i(A''q+B''s)]=0,$$

или

$$A''p(\operatorname{ctg}\pi\theta\cos\pi\theta_0+\sin\pi\theta_0)+B''r\sin\pi\theta_0=0,\ A''q+B''s=0.$$

Отсюда находим

$$B''=-\frac{q}{s}A''=-\frac{p}{r}\frac{\cos\pi(\theta-\theta_0)}{\sin\pi\theta\sin\pi\theta_0}A''.$$

Оба полученные для B'' выражения совместны, как это легко проверить с помощью равенства (53) для $\frac{ps}{qr}$. Как известно из теории гипергеометрического уравнения,

$$\frac{p}{r}=\frac{(\Gamma)(c)\cdot\Gamma(1-a)\cdot\Gamma(1-b)}{\Gamma(2-c)\cdot\Gamma(c-a)\cdot\Gamma(c-b)}.$$

В нашем случае

$$\frac{p}{r}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\theta\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+\theta-\theta_0\right)\cdot\Gamma(\theta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(1-\theta_0)}.$$

Полагая

$$-\frac{p}{r}\frac{\cos\pi(\theta-\theta_0)}{\sin\pi\theta\sin\pi\theta_0}=-\frac{q}{s}=\mu,$$

напишем

$$B''=\mu A''.$$

Что касается Z, F, z и f, то они представляются формулами

$$\left.\begin{aligned} Z&=A''\frac{(\operatorname{ctg}\pi\theta+i)U+i\mu V}{\sqrt{1-t}}, & F&=-kA''\frac{U+\mu V}{\sqrt{1-t}},\\ z&=A''\int_1^t\frac{(\operatorname{ctg}\pi\theta+i)U+i\mu V}{\sqrt{1-t}}dt-le^{\pi i\theta_0}, & f&=-kA''\int_1^t\frac{U+\mu V}{\sqrt{1-t}}dt. \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

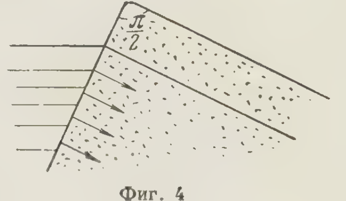
Число A'' будет найдено, если известен отрезок BE *. Пусть, в точке E, $z=-l_0e^{\pi i\theta}$, тогда

$$A=\frac{l_0e^{\pi i\theta}-le^{\pi i\theta_0}}{\int\limits_0^1\frac{(\operatorname{ctg}\pi\theta+i)U+i\mu V}{\sqrt{1-t}}dt}. \quad \text{(c)}$$

В уравнении для f мы взяли произвольную постоянную интегрирования так, чтобы, при $t=1$, $f=\varphi+i\psi=0$. При убывании t от 1 до 0, ψ остается постоянным (равным нулю), так как DE есть линия тока. При этом φ изменяется от 0 до некоторого значения $\varphi=\varphi_0$, так что

$$KA\int_0^1\frac{U+\mu V}{\sqrt{1-t}}dt=\varphi_0.$$

Если бы нам было известно φ_0, то последняя формула дала бы возможность вычислить A, а по формуле (c) мы нашли бы l_0.



Фиг. 4

Второй случай: $\pi\theta_1\geqslant\frac{\pi}{2}$. При $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ на плоскости (v_x, v_y) треугольник ADE вырождается в точку, так как линии AD и EC взаимно перпендикулярны. Следовательно, во всей области движения скорость одна и та же, равная по величине $k\cos\pi\theta$ и направленная перпендикулярно линии AD (фиг. 4).

Если $\pi\theta_1>\frac{\pi}{2}$, то движение будет такое же, как и при $\pi\theta=\frac{\pi}{2}$.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
23.III.1939.

* В действительности отрезок BE является искомым. Если бы мы имели конечную область движения, то смогли бы его найти. В нашей же задаче мы в сущности не имеем ни одной заданной длины.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б., Некоторые новые вопросы механики сплошной среды, АН СССР, 1938.

[2] Полубаринова-Кочина П. Я., Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды, Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем., 1938, № 3.

P. POLOUBARINOVA-KOCHINA. AN APPLICATION OF THE THEORY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOME PROBLEMS OF GROUND-WATER MOTION (THE CASE OF THREE SINGULAR POINTS)

SUMMARY

In the present paper the following problem is considered: on the real axis of the complex t plane are given three points A_1, A_2, A_3, in which $t=0, 1, \infty$ respectively. To find two functions Z and F satisfying on the segments of the real axis the equations (1), where k_1, l, m_1, n_1 are complex constants with the determinant (2) different from zero. Z and F must be analytical in the upper half-plane and holomorphic in it everywhere except the points $t=0, 1, \infty$, which are regular singular points. The derivative of the function $\zeta = \frac{F}{Z}$ must not vanish in any point of the domain. Then Z and F represent linear combinations of the fundamental system of solutions of a linear differential equation of Fuchs' class (the formulae (11)). The indices about the singular point A_1 are determined by

$$\alpha = \frac{\log \lambda_1}{2\pi i}, \quad \alpha' = \frac{\log \lambda_2}{2\pi i}$$

where λ_1 and λ_2 are the roots of the determining equation (51). The conditions on the segments (1) enable us to find the arbitrary constants in the formula (11) up to a constant factor.

The last paragraph is devoted to the solution of an example from the theory of plane stationary motions of ground-waters.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Н. А. АРТЕМЬЕВ

ОСУЩЕСТВИМЫЕ ДВИЖЕНИЯ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе изучается устойчивость движений и траекторий, определяемых стационарной или нестационарной динамической системой, по отношению к возмущениям начальных условий и по отношению к возмущению самих дифференциальных уравнений, и устанавливается достаточный признак устойчивости этого рода для периодических решений определенного класса.

§ 1. Введение

А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин ввели понятие «грубых» систем дифференциальных уравнений ([1,2]). Авторы стремились при этом приблизить математическую постановку задач к реальным физическим условиям. Одновременно, благодаря удачно введенному понятию, они достигли и другой цели: им удалось для выделенного класса «грубых» систем дать почти полную классификацию возможных типов траекторий.

В этой работе я ввожу понятие «осуществимых» движений и траекторий также с целью приблизить математическую постановку задач качественной теории дифференциальных уравнений к реальным физическим условиям. Однако я не сужаю класса рассматриваемых дифференциальных уравнений, а выделяю определенный класс изучаемых траекторий.

Пусть в некоторой ограниченной области $\mathfrak{G}$ n-мерного фазового пространства R, координаты точек которого мы будем обозначать x_1, x_2, ..., x_n, и при всех $t \geqslant 0$ задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \ldots, x_n), \ j = 1, \ldots, n. \qquad (1)$$

Относительно функций X_j мы пока сделаем следующие предположения:

1° X_j, $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, j, $k = 1, \ldots, n$ вещественны, однозначны и непрерывны в замкнутой области* $\{x\} \in \overline{\mathfrak{G}}$, $t \in [0, +\infty)$.

2° Частные производные $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, j, $k = 1, \ldots, n$ удовлетворяют в области

* Точку пространства R с координатами x_1, ..., x_n будем обозначать символом $\{x\}$ или просто буквой x.

$\overline{\mathfrak{G}}$, при $t \in [0, +\infty)$, условию Липшица:

$$\left| \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{x'} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{x} \right| \leqslant L \sum_{k=1}^{n} |x_k' - x_k|,$$

где L — постоянная.

Если система дифференциальных уравнений (1) описывает какой-либо физический процесс, то правые части этой системы обычно известны лишь приближенно. Поэтому имеет смысл изучить, как изменяются решения этой системы, или например траектории, при небольших изменениях правых частей системы (1). Такого рода исследование проведено например в книге Kamke ([3]). Однако проделанное Kamke исследование относится к изменению решения в конечном промежутке времени $-\infty < \alpha \leqslant t \leqslant \beta < +\infty$.

В большинстве случаев, когда мы интересуемся качественными свойствами решений, эти качественные свойства бывают связаны с поведением решения в б е с к о н е ч н о м промежутке времени. Таковы, например, вопросы об устойчивости решения в смысле Ляпунова, в смысле Пуассона и другие. Поэтому не лишено интереса исследовать, как изменяются решения в бесконечном промежутке времени при небольших изменениях правых частей уравнения.

Рассмотрим наряду с системой (1) измененную систему

$$\frac{dy_j}{dt} = X_j(t, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon Y_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1'}$$

где Y_j удовлетворяют условиям Липшица в области $y \in \overline{\mathfrak{G}}$, $t \in [0, +\infty)$.

Пусть начальным условиям $\{x(0)\} = \{a\}$ соответствует решение $\{\varphi(t)\}$ системы (1), существующее в промежутке $0 \leqslant t < +\infty$, траекторию которого в пространстве R обозначим K. Рассмотрим теперь решение системы (1′), соответствующее начальным условиям

$$\{y(0)\} = \{a + \alpha\} = \{b\}, \text{ где } |\alpha_j| \leqslant \varepsilon, \; j = 1, \ldots, n.$$

На основании теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра и начальных условий мы можем утверждать, что при ε достаточно малом этим начальным условиям соответствует решение $\{\psi(t)\}$ системы (1′), существующее в сколь угодно большом (но конечном) промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant T$. На вопрос о том, существует ли решение $\{\psi(t)\}$ в бесконечном промежутке времени $0 \leqslant t < +\infty$, указанная теорема ответа, конечно, не дает.

Обозначим траекторию движения $\{\psi(t)\}$ через L. Символами $U_\eta(K^+)$ и $U_\eta(L^+)$ условимся обозначать соответственно η-окрестности положительных полутраекторий K^+ и L^+.

Аналогично символом $U_\eta(\{\varphi(t)\}^+)$ условимся обозначать η-окрестность интегральной кривой * решения $\{\varphi(t)\}$, соответствующей значениям $t \geqslant 0$.

* Интегральной кривой мы называем $n+1$-мерную кривую пространства $(t, x_1 \ldots, x_n)$. Траекторией мы называем n-мерную кривую пространства $(x_1, \ldots, x_n)$.

Введем теперь следующие определения:

Определение I. Полутраекторию K^+ будем называть осуществимой, если для всякого сколь угодно малого заданного $\eta > 0$ можно найти такое $\varepsilon(\eta) > 0$, что всякое движение $\{\psi(t)\}$ существует при всех $0 \leqslant t$ и всякая соответствующая полутраектория $L^+ \subset U_\eta(K^+)$.

Определение II. Движение $\{\varphi(t)\}$ мы будем называть положительно осуществимым, если для всякого сколь угодно малого заданного $\eta > 0$ можно найти такое $\varepsilon(\eta) > 0$, что всякое движение $\{\psi(t)\}$ существует при всех $t \geqslant 0$ и при всех $t \geqslant 0$ справедливы неравенства $|\psi_j(t) - \varphi_j(t)| \leqslant \eta$, $j = 1, \ldots, n$.

Из определения видно, что осуществимость есть своего рода устойчивость. Ввиду того что термин «устойчивость» уже употребляется в большом числе значений, я решил назвать этот вид устойчивости осуществимостью.

В дальнейшем мы изучим отдельно два типа систем дифференциальных уравнений в нормальной форме.

К 1-му типу мы отнесем такие системы, в которых правые части явно зависят от времени t и являются периодическими функциями t, т. е. система имеет вид

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

причем

$$X_j(t, x_1, \ldots, x_n) = X_j(t + 2\pi, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Если правые части системы не зависят явно от времени t, т. е. система имеет вид

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

то такую систему причислим ко 2-му типу.

В этой работе мы устанавливаем достаточный признак осуществимости периодических движений системы 1-го типа определенного класса. В следующей работе мы дадим достаточный признак осуществимости полутраекторий периодических решений системы 2-го типа определенного класса.

Укажем еще в нескольких словах на то значение, которое может иметь изучение осуществимости траекторий. Рассмотрим для этого ограниченную проблему трех тел. Пусть астероид P движется под действием Солнца S и Юпитера J. Считая массы Солнца, Юпитера и астероида равными соответственно 1, μ, 0, а движение Юпитера круговым, уравнения движения астероида во вращающихся осях, отнесенных к центру инерции S и J, можем написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

$$\Omega = \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) + k^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right).$$

Здесь n — угловая скорость Юпитера относительно неподвижных осей координат, k^2 — постоянная тяготения, r_1 и r_2 — расстояния астероида от Солнца и Юпитера.

Отбросим в правых частях уравнений (A) члены, происходящие от действия Юпитера, т. е. положим $\mu = 0$. Таким путем мы получим задачу двух тел S и P. Если соответствующая эллиптическая орбита астероида P оказалась бы осуществимой, то это значит, что при достаточно малой массе μ Юпитера возмущенная орбита астероида P при всех $t \geqslant 0$ будет лежать в любой сколь угодно малой окрестности невозмущенной эллиптической орбиты. Более того, если на астероид P будут действовать возмущения от каких-либо других планет достаточно малой массы, движение которых при всех значениях $t \geqslant 0$ совершается по орбитам, достаточно удаленным от Солнца, то в случае осуществимости возмущенная орбита астероида все равно будет лежать в сколь угодно малой окрестности невозмущенной эллиптической орбиты. Таким образом осуществимые траектории являются классом особенно прочных траекторий.

Здесь следует, впрочем, отметить, что те достаточные признаки осуществимости, которые я устанавливаю в этой работе, скорей могут найти свое приложение в радиотехнике, чем в небесной механике.

§ 2

Рассмотрим систему 1-го типа

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

т. е. такую, правые части которой являются периодическими функциями времени t, период которых мы примем равным 2π. Предположим кроме того, что функции X_j удовлетворяют сделанным выше предположениям 1° и 2°

Пусть уравнения (1) допускают периодическое решение

$$x_j = \varphi_j(t) = \varphi_j(t + 2\pi), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

принадлежащее при всех рассматриваемых значениях t области $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим наряду с системой (1) измененную систему *

$$\frac{dy_j}{dt} = X_j(t, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon Y_j(t, y_1, \ldots, y_n). \tag{3}$$

Мы предположим, что при всех

$$y \in \overline{\mathfrak{G}},$$
$$t \in [0, +\infty)$$

функции Y_j вещественны, однозначны и непрерывны.

* Функции Y_j мы, разумеется, не предполагаем обязательно периодическими функциями t.

Кроме того мы предположим, что функции Y_j в той же области удовлетворяют неравенствам

$$|Y_j(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant 1, \quad j=1, \ldots, n \tag{4}$$

и

$$|Y_j(t, y_1', \ldots, y_n') - Y_j(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant l \sum_{k=1}^{n} |y_k' - y_k|, \quad j=1, \ldots, n, \tag{4'}$$

где l — постоянная.

Исследуем окрестность периодического решения $\{\varphi(t)\}$. Для этого положим

$$y_j = \varphi_j(t) + z_j(t), \quad j=1, \ldots, n, \tag{5}$$

и составим дифференциальные уравнения возмущенного движения, которым удовлетворяют функции $z_j(t)$. Имеем

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi} \cdot z_k + R_j(t, z_1, \ldots, z_n) + \\ + \varepsilon Y_j(t, \varphi_1(t)+z_1, \ldots, \varphi_n(t)+z_n), \tag{6}$$

где R_j — остаточные члены в разложении по формуле Тейлора функций X_j.

Составим также уравнения в вариациях, соответствующие неизмененной системе (1), т. е. линейные уравнения

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi} \cdot \bar{z}_k. \tag{7}$$

Введем понятие расстояния в n-мерном пространстве* E, а именно. расстояние между точками $\{z\}$ и $\{z'\}$ положим равным**

$$r(z, z') = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k' - z_k)^2}.$$

Для краткости, расстояние точки $\{z(t)\}$ от начала координат будем обозначать просто символом $r(t)$.

Предположим теперь, что фундаментальная система решений уравнений в вариациях

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t)\, z_k, \quad j=1, \ldots, n, \tag{8}$$

где

$$A_{jk}(t) = \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{\varphi(t)}, \quad j, k=1, \ldots, n, \tag{9}$$

обладает характеристическими показателями $\sigma_k = -\lambda_k + i\omega_k$, $k=1, \ldots, n$, с отрицательными вещественными частями $-\lambda_k$, удовлетворяющими неравенству

$$\lambda_k \geqslant \beta > 0. \tag{10}$$

* Пространство, точками которого являются $\{z\}$, будем обозначать символом E.

** Аналогично символом $r(x', x)$ будем обозначать эвклидово расстояние между точками x', x пространства R.

Пусть $\bar{g}$ какая-либо замкнутая область $\subset \mathfrak{G}$. Введем следующее определение:

Определение III. Все периодические решения $\{\varphi(t)\}$, периода 2π системы (1), удовлетворяющие условиям:

1° $\{\varphi(t)\} \in \bar{g}$ при любом $t \geqslant 0$,

2° характеристические показатели системы (8) обладают отрицательными вещественными частями $-\lambda_k$, удовлетворяющими условию (10),

назовем периодическими решениями „класса $H(\beta, g)$".

Будем интерпретировать решение $\{x\} = \{\varphi(t)\}$ в пространстве $n+1$ измерений с осями $t, x_1, \ldots, x_n$. Этому решению будет соответствовать $n+1$-мерная интегральная кривая системы (1).

Введем определения *:

Определение IV. Область Ω, содержащую внутри себя интегральную кривую $\{x\} = \{\varphi(t)\}$ и такую, что каждая интегральная кривая системы (1), проходящая через какую-либо точку области Ω, асимптотически стремится к интегральной кривой $\{\varphi(t)\}$ при $t \to +\infty$, назовем ω-предельной областью притяжения движения $\{\varphi(t)\}$.

Определение V. Окрестность $U_\varepsilon(\{\varphi(t)\})$, содержащуюся в ω-предельной области притяжения Ω интегральной кривой $\{\varphi(t)\}$, условимся называть ω-предельной ε-окрестностью притяжения интегральной кривой $\{\varphi(t)\}$.

В своей предыдущей работе [4], посвященной оценке окрестности притяжения периодических движений, а также оценке сверху числа периодических движений класса $H(\beta, \bar{g})$, содержащихся в области $\mathfrak{G}$, я пользовался одной леммой, с помощью которой я докажу теперь осуществимость траектории любого периодического движения класса $H(\beta, \bar{g})$. Эта лемма формулируется следующим образом:

ЛЕММА I. *Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений*

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t)\,\bar{z}_k, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

коэффициенты которой суть вещественные периодические функции t с периодом 2π, непрерывные при всяком вещественном t и удовлетворяющие неравенствам

$$|A_{jk}(t)| \leqslant A, \quad j, k = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

где A — постоянная.

Тогда, если все характеристические показатели системы, $\sigma_k = -\lambda_k + i\omega_k$, $k = 1, \ldots, n$, имеют отрицательные вещественные части, такие,

* Понятие области притяжения принадлежит А. А. Андронову, хотя, насколько мне известно, нигде не было им опубликовано.

что $\lambda_k \geqslant \beta > 0$, $k = 1, \ldots, n$, *то любое решение этой системы удовлетворяет неравенству*

$$\bar{r}(2\pi s + t) \leqslant \bar{r}(t)\, n\, \frac{M^n - 1}{M - 1}\, e^{-2\pi s \beta}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{13}$$

где $M = sn\,[1 + e^{2\pi(\beta + nA)}]$, *а* s — *любое целое положительное число.*

§ 3

Пусть заданы какие-либо две системы I и II дифференциальных уравнений в нормальной форме, с одинаковым числом неизвестных функций, зависящих от одного аргумента, который попрежнему обозначаем буквой t. Решения систем I и II, удовлетворяющие при каком-либо значении $t = t_0$ одним и тем же начальным условиям, мы будем называть «соответствующими» решениями.

Рассмотрим теперь наряду с системой уравнений в вариациях (8)

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t)\, \bar{z}_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

измененную систему

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k-1}^{n} A_{jk}(t)\, z_k + R_j(t, z_1, \ldots, z_n) + \varepsilon U_j(t, z_1, \ldots, z_n), \tag{$\overline{\text{A}}$}$$

коэффициенты которой U_j удовлетворяют следующим условиям:

1° функции $U_j(t, z_1, \ldots, z_n)$ непрерывны и ограничены в области $t \geqslant 0$, $r(z, 0) \leqslant \eta$, именно

$$|U_j(t, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant 1,$$

2° кроме того удовлетворяют в этой области условию Липшица

$$|U_j(t, z_1', \ldots, z_n') - U_j(t, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant l \sum_{k=1}^{n} |z_k' - z_k|,$$

где l — постоянная.

Докажем следующую лемму:

ЛЕММА II. *Решения системы* ($\overline{\text{A}}$) *отличаются от «соответствующих» решений системы* (8), *в промежутке* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi s$, *при* $r(0)$ *и* ε *достаточно малых, не больше, чем на величину*

$$\frac{[\varepsilon + n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{nA}\,[e^{2\pi sn(A + \mu + \varepsilon l)} - 1],$$

где

$$\vartheta(s) = n\, e^{2\pi snA},$$

т. е.

$$|z_j(t) - \bar{z}_j(t)| \leqslant \frac{[\varepsilon + n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{nA}\,[e^{2\pi sn(A + \mu + \varepsilon l)} - 1],$$

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi s.$$

или

$$\left.\begin{aligned} r(t) &\leqslant \bar{r}(t) + \frac{[\varepsilon + n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{n^{\frac{1}{2}} A}\,[e^{2\pi s n(A+\mu+\varepsilon l)} - 1], \\ r(t) &\geqslant \bar{r}(t) - \frac{[\varepsilon + n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{n^{\frac{1}{2}} A}\,[e^{2\pi s n(A+\mu+\varepsilon l)} - 1], \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi s,$$

причем величина μ *стремится к нулю вместе с* $r(0)$.

Доказательство. Для доказательства леммы мы применим метод последовательных приближений.

Возьмем область $\bar{g} \subset \mathfrak{G}$. Пусть γ и Γ будут соответственно границы областей $\bar{g}$ и $\mathfrak{G}$. Обозначим через η нижнюю грань расстояний между какими-либо двумя точками, принадлежащими соответственно границам γ и Γ, т. е.

$$\eta = \inf r[\{x_\gamma\}, \{x_\Gamma\}], \tag{14}$$

где $r[\{x_\gamma\}, \{x_\Gamma\}]$ — расстояние между точками $\{x_\gamma\}$ и $\{x_\Gamma\}$, а $\{x_\gamma\}$ и $\{x_\Gamma\}$ — любые точки, принадлежащие γ и Γ.

Пусть $\{\varphi(t)\}$ — периодическое решение $\in H(\beta, \bar{g})$. За число η, фигурирующее в условии 1°, мы примем теперь число, определяемое равенством (14).

В моей работе (4) было доказано, что если точка $\{\varphi(t)\} + \{z(t)\} \in \mathfrak{G}$ и функции X_j удовлетворяют условиям 1° и 2°, то функции R_j удовлетворяют неравенству

$$|R_j(t, z_1', \ldots, z_n') - R_j(t, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant$$
$$\leqslant L \cdot \max\left\{\sum_{k=1}^{n} |z_k'|,\ \sum_{k=1}^{n} |z_k|\right\} \sum_{k=1}^{n} |z_k' - z_k|. \tag{15}$$

Отсюда вытекает, что если точки $\{z'\}$ и $\{z\}$ удовлетворяют неравенствам

$$r(z, 0) \leqslant \xi, \quad r(z', 0) \leqslant \xi,$$

то функции R_j удовлетворяют условию Липшица

$$|R_j(t, z_1', \ldots, z_n') - R_j(t, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant \mu \sum_{k=1}^{n} |z_k' - z_k|, \quad j = 1, \ldots, n \tag{16}$$

с коэффициентом $\mu = nL\xi$.

Таким образом коэффициент μ в неравенствах (16) может быть сделан сколь угодно малым, если только выбрать достаточно малым число ξ. Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем.

Примем за нулевое приближение $\{z^0(t)\}$ к решению системы $(\bar{A})$ «соответствующее» решение системы в вариациях (8), т. е. $\{\bar{z}(t)\}$. Это решение $\{\bar{z}(t)\}$ удовлетворяет уравнениям

$$\bar{z}_j(t) = \bar{z}_j(0) + \int_0^t \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t)\,\bar{z}_k(t)\,dt, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Первое приближение $\{z'(t)\}$ определим равенством

$$z'_j(t) = \bar{z}_j(0) + \int_0^t \sum_{k=1}^n A_{jk}(t)\,\bar{z}_k\,dt + \int_0^t R_j(t, z_1, \ldots, \bar{z}_n)\,dt + \\ + \varepsilon \int_0^t U_j(t, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\,dt. \tag{18}$$

Все последующие приближения (номеру приближения соответствует верхний индекс) определим с помощью рекуррентной формулы

$$z_j^{m+1}(t) = z_j^m(0) + \int_0^t \sum_{k=1}^n A_{jk}(t)\,z_k^m(t)\,dt + \\ + \int_0^t R_j(t, z_1^m, \ldots, z_n^m)\,dt + \varepsilon \int_0^t U_j(t, z_1^m, \ldots, z_n^m)\,dt. \tag{19}$$

Решения системы уравнений

$$\frac{dy_j}{dt} = A \sum_{k=1}^n y_k \tag{20}$$

с начальными условиями

$$y_j|_{t=0} = r(0) \tag{20'}$$

являются усиливающими для решений системы (8).

Решая систему (20) с начальными условиями (20′), найдем оценку для нулевого приближения:

$$|z_j^0(t)| \equiv |\bar{z}_j(t)| \leqslant y_j(t) \leqslant r(0)\,\vartheta(s), \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi s, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

где $\vartheta(s) = n\,e^{2\pi s n A}$.

Пользуясь условием Липшица (16) с коэффициентом $\mu = nL\eta$ и условиями 1° и 2°, мы будем пока считать их справедливыми для точек $\{z^m\}$ и $\{z^{m+1}\}$ при любом m и при всех $0 \leqslant t \leqslant 2\pi s$. В конце доказательства мы установим неравенство, которому должно удовлетворять для этого начальное расстояние $r(0)$ и ε.

Тогда из формулы (18), (21) и из условий 1° и 2° получим следующую оценку для первого приближения

$$|z'_j(t)| \leqslant r(0)\,\vartheta(s) + [n\vartheta(s)\,\mu r(0) + \varepsilon]\,t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi s. \tag{22}$$

Обозначая оценку величины $|z_j^m(t)|$, при любом $j = 1, \ldots, n$, через $K_m(t)$, из формулы (19) получаем рекуррентную формулу для оценок

$$K_{m+1}(t) = r(0) + \varepsilon t + n(A + \mu) \int_0^t K_m(t)\,dt, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Применяя формулу (23) последовательно для $m=1, 2, \ldots,$ получим

$$K_{m+1}(t)=r(0)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{[n(A+\mu)t]^k}{k!}+\frac{\varepsilon}{n(A+\mu)}\sum_{k=1}^{m}\frac{[n(A+\mu)t]^k}{k!}+$$

$$+[n(A+\mu)]^m\underbrace{\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{m}K_1(t)\,dt. \tag{24}$$

Далее

$$\underbrace{\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{m}K_1(t)\,dt=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^t(t-u)^{m-1}K_1(u)\,du=$$

$$=r(0)\,\vartheta(s)\,\frac{[n(A+\mu)t]^m}{m!}+\frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\,r(0)\,\mu]}{n(A+\mu)}\cdot\frac{[n(A+\mu)t]^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24), находим

$$K_{m+1}(t)=r(0)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{[n(A+\mu)t]^k}{k!}+\frac{\varepsilon}{n(A+\mu)}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{[n(A+\mu)t]^k}{k!}+$$

$$+r(0)\,\vartheta(s)\,\frac{[n(A+\mu)t]^m}{m!}+\frac{r(0)\,\vartheta(s)\,\mu}{(A+\mu)}\cdot\frac{[n(A+\mu)t]^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{26}$$

Переходя в формуле (26) к пределу при $m\to+\infty$ и замечая, что $K_m(t)$ монотонно возрастающая функция m, имеем

$$K_\nu(t)\leqslant\lim_{m\to+\infty}K_{m+1}(t)\equiv K(t)=r(0)\,e^{n(A+\mu)t}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{n(A+\mu)}[e^{n(A+\mu)t}-1],\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi s,\quad \nu=1, 2, \ldots \tag{27}$$

Отсюда *

$$\lim_{m\to+\infty}|z_j^m(t)|\equiv|z_j(t)|\leqslant r(0)\,e^{n(A+\mu)t}+\frac{\varepsilon}{n(A+\mu)}[e^{n(A+\mu)t}-1]. \tag{28}$$

Оценим теперь величину $|z_j(t)-\bar z_j(t)|$.

Вычитаем из уравнений (19) уравнения (17):

$$z_j^{m+1}(t)-\bar z_j(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^{n}A_{jk}(t)\,[z_k^m(t)-\bar z_k(t)]\,dt+$$

$$+\int_0^t R_j(t, z_1^m, \ldots, z_n^m)\,dt+\varepsilon\int_0^t U_j(t, z_1^m, \ldots, z_n^m)\,dt. \tag{29}$$

---

* Существование предела $\lim\limits_{m\to+\infty}|z_j^m(t)|$, а также и то, что функции $z_j(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям $(\bar A)$, доказывается как обычно в методе Picard'а с помощью оценки $|z_j^{m+1}(t)-z_j^m(t)|$, на чем мы здесь не останавливаемся.

Перепишем уравнение (29) в виде

$$z_j^{m+1}(t)-\bar{z}_j(t)=\int_0^t \sum_{k=1}^n A_{jk}(t)\,[z_k^m(t)-\bar{z}_k(t)]\,dt+$$
$$+\int_0^t \{R_j(t, z_1^m,\ldots,z_n^m)-R_j(t,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)\}\,dt+$$
$$+\varepsilon\int_0^t \{U_j(t, z_1^m,\ldots,z_n^m)-U_j(t,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)\}\,dt+$$
$$+\int_0^t R_j(t,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)\,dt+\varepsilon\int_0^t U_j(t,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)\,dt. \tag{30}$$

Обозначим оценку величины $|z_j^m(t)-\bar{z}_j(t)|$ через $Q_m(t)$. Из (30) и (21) находим рекуррентную формулу для оценок

$$Q_{m+1}(t)=[\varepsilon+n\vartheta(s)\,\mu r(0)]\,t+n(A+\mu+\varepsilon l)\int_0^t Q_m(t)\,dt. \tag{31}$$

Применяя формулу (31) последовательно для $m=1, 2,\ldots,$ получим

$$Q_{m+1}(t)=\frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{n(A+\mu+\varepsilon l)}\sum_{k=1}^m \frac{[n(A+\mu+\varepsilon l)\,t]^k}{k!}+$$
$$+[n(A+\mu+\varepsilon l)]^m\underbrace{\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{m} Q_1(t)\,dt. \tag{32}$$

Но

$$Q_1(t)=[\varepsilon+n\vartheta(s)\,\mu r(0)]\,t,$$

поэтому

$$\underbrace{\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{m} Q_1(t)\,dt=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^t (t-u)^{m-1}Q_1(u)\,du=$$
$$=\frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\,\mu r(0)]\,t^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32), находим

$$Q_{m+1}(t)=\frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{n(A+\mu+\varepsilon l)}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{[n(A+\mu+\varepsilon l)\,t]^k}{k!}. \tag{34}$$

Переходя в (34) к пределу, получаем

$$Q(t)\equiv\lim_{m\to+\infty} Q_m(t)=\frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{n(A+\mu+\varepsilon l)}\,[e^{n(A+\mu+\varepsilon l)t}-1]. \tag{35}$$

Из (35) в силу определения функции $Q(t)$ вытекает неравенство

$$|z_j(t)-\bar{z}_j(t)|\leqslant\frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{n(A+\mu+\varepsilon l)}\,[e^{n(A+\mu+\varepsilon l)t}-1],\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi s. \tag{36}$$

Для упрощения дальнейших вычислений заменяем неравенство (36) более грубым:

$$|z_j(t)-\bar{z}_j(t)| \leqslant \frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\mu r(0)]}{nA}[e^{2\pi sn(A+\mu+\varepsilon l)}-1], \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi s. \quad (37)$$

Из (37) получаем

$$r[z(t), \bar{z}(t)] \leqslant \frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\mu r(0)]}{n^{\frac{1}{2}}A}[e^{2\pi sn(A+\mu+\varepsilon l)}-1], \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi s, \quad (38)$$

отсюда, пользуясь теоремой треугольника, находим окончательно

$$\left.\begin{aligned} r(t) &\leqslant \bar{r}(t)+\frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\mu r(0)]}{n^{\frac{1}{2}}A}[e^{2\pi sn(A+\mu+\varepsilon l)}-1] \\ r(t) &\geqslant \bar{r}(t)-\frac{[\varepsilon+n\vartheta(s)\mu r(0)]}{n^{\frac{1}{2}}A}[e^{2\pi sn(A+\mu+\varepsilon l)}-1] \end{aligned}\right\} 0\leqslant t\leqslant 2\pi s. \quad (39)$$

При выводе неравенств (39) мы предполагали, что условие Липшица (16) и условия 1° и 2° справедливы для точек $\{z^m\}$. Теперь мы установим неравенство, которому должны удовлетворять $r(0)$ и ε.

Мы должны выбрать $r(0)$ и ε столь малыми, чтобы точка $\{\varphi(t)\}+$ $+\{z^m(t)\}$ при любом $m=0, 1, 2, \ldots$ и при всех $0\leqslant t\leqslant 2\pi s$ принадлежала области $\mathfrak{G}$.

Из неравенства (28) видим, что это будет наверное выполнено, если потребовать, чтобы

$$r(0)\,e^{2\pi sn(A+\mu)}+\frac{\varepsilon}{n(A+\mu)}[e^{2\pi sn(A+\mu)}-1]<\eta.$$

Это последнее неравенство будет наверное выполнено, если выбрать

$$\left.\begin{aligned} r(0) &< \frac{\eta}{2\,e^{2\pi sn(A+\mu)}}=\alpha, \quad \mu=nL\eta, \\ \varepsilon &< \frac{n(A+\mu)\eta}{2[e^{2\pi sn(A+\mu)}-1]} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Сравнивая условие 1° с неравенствами (4) и (4′), видим, что оценки леммы II непосредственно применимы к системе уравнений (6), если положить

$$Y_j(t, \varphi_1(t)+z_1,\ldots,\varphi_n(t)+z_n)\equiv U_j(t, z_1,\ldots,z_n), \quad j=1,\ldots,n.$$

§ 4

ЛЕММА III. *Если* $r(0)$ *и* ε *достаточно малы, а именно удовлетворяют неравенствам*

$$r(0) < \alpha, \quad \varepsilon < \frac{n(A+\mu)\eta}{2\left[e^{2\pi s n(A+\mu)} - 1\right]}, \quad \mu = nL\eta, \tag{41}$$

то решение измененной системы (6) *удовлетворяет неравенству*

$$r(2\pi s) \leqslant r(0)\left\{n\frac{M^n - 1}{M-1}e^{-2\pi s\beta} + \mu\frac{n^{\frac{1}{2}}\vartheta(s)\left[e^{2\pi s n(A+\mu+\varepsilon l)} - 1\right]}{A}\right\} + \\ + \varepsilon\frac{e^{2\pi s n(A+\mu+\varepsilon l)} - 1}{n^{\frac{1}{2}}A}, \tag{42}$$

причем при заданных n, L, A, η, β, *надлежащим выбором чисел* S, $\omega(S)$ *и* $\varepsilon_1(S, \omega)$, *это неравенство можно привести к виду*

$$r(2\pi S) \leqslant r(0)\cdot 2^{-\nu} + \delta, \quad \textit{при} \quad r(0) \leqslant \omega(S), \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{43}$$

в котором множитель $2^{-\nu}$ *можно сделать сколь угодно малым одним лишь выбором чисел* S *и* $\omega(S)$, *а* δ *можно сделать сколь угодно малым соответствующим выбором числа* ε_1.

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из I и II леммы. Действительно лемма II дает

$$r(2\pi s) \leqslant \bar{r}(2\pi s) + \frac{\left[\varepsilon + n\vartheta(s)\mu r(0)\right]}{n^{\frac{1}{2}}A}\left[e^{2\pi s n(A+\mu+\varepsilon l)} - 1\right];$$

пользуясь теперь неравенством леммы I и принимая во внимание, что $r(0) = \bar{r}(0)$, получим

$$r(2\pi s) \leqslant r(0)\left\{n\frac{M^n - 1}{M-1}e^{-2\pi s\beta} + \mu\frac{n^{\frac{1}{2}}\vartheta(s)\left[e^{2\pi s n(A+\mu+\varepsilon l)} - 1\right]}{A}\right\} + \\ + \varepsilon\frac{e^{2\pi s n(A+\mu+\varepsilon l)} - 1}{n^{\frac{1}{2}}A}, \tag{44}$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы будем рассматривать всегда значения ε меньшие 1. Таким образом вместо второго неравенства (40) мы будем считать, что соблюдается неравенство

$$\varepsilon < \min\left\{1, \frac{n(A+\mu)\eta}{2\left[e^{2\pi s n(A+\mu)} - 1\right]}\right\}. \tag{40'}$$

Неравенство (44) мы теперь усилим, заменяя в правой части его ε, входящее в показатели единицей:

$$r(2\pi s) \leqslant r(0)\left\{ n\,\frac{M^n-1}{M-1}\,e^{-2\pi s\beta} + \mu\,\frac{n^{\frac{1}{2}}\,\vartheta(s)\,[e^{2\pi sn(A+\mu+l)}-1]}{A}\right\} + \\ + \varepsilon\,\frac{[e^{2\pi sn(A+\mu+l)}-1]}{n^{\frac{1}{2}}A}. \tag{45}$$

Пусть теперь числа n, L, A, η и β заданы. Положим для краткости

$$\left.\begin{aligned} n\,\frac{M^n-1}{M-1}\,e^{-2\pi s\beta} + \mu\,\frac{n^{\frac{1}{2}}\vartheta(s)\,[e^{2\pi sn(A+\mu+l)}-1]}{A} &= q,\\ \frac{e^{2\pi sn(A+\mu+l)}-1}{n^{\frac{1}{2}}A} &= p. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Функция $\theta(s) = \dfrac{M^n-1}{M-1}\,e^{-2\pi s\beta}$ при $s \longrightarrow +\infty$ стремится к нулю. Выберем $s = S$ столь большим, чтобы

$$n\,\frac{M^n-1}{M-1}\,e^{-2\pi S\beta} < \frac{1}{2^{\nu+1}}. \tag{47}$$

Величина S из уравнения (47) может быть выражена в функции величин n, A, β, L, η.

Теперь определим ε и ξ из равенств

$$\left.\begin{aligned} n^{\frac{3}{2}}L\xi\,\frac{\vartheta(S)\,[e^{2\pi Sn(A+\mu+l)}-1]}{A} &= \frac{1}{2^{\nu+1}},\\ \varepsilon\,\frac{e^{2\pi Sn(A+\mu+l)}-1}{n^{\frac{1}{2}}A} &= \delta. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Величины ξ и ε из равенств (48) определяются как функции величин δ, n, A, β, L, η.

Потребуем теперь, чтобы

$$r(0) < \frac{\xi}{2\,[e^{2\pi Sn(A+nL\eta)}-1]}, \qquad \varepsilon < \min\left\{1,\ \frac{n\,(A+nL\xi)\,\xi}{2\,[e^{2\pi Sn(A+nL\eta)}-1]}\right\}. \tag{48'}$$

Очевидно, что в силу неравенств (48′), правая часть неравенства (45) будет $\leqslant \delta + r(0)\cdot 2^{-\nu}$, что и требовалось доказать.

§ 5

Для того чтобы доказать положительную осуществимость движения $\{\varphi(t)\}$, необходимо воспользоваться еще одним свойством систем дифференциальных уравнений вида (6).

Пусть $\{z(t)\}$ есть некоторое решение системы (6), для которого

$$r(0) \leqslant \frac{\xi}{2\left[e^{2\pi S n(A+nL\eta)}-1\right]},$$

$$\varepsilon < \min\left\{1, \frac{n(A+nL\xi)\,\xi}{2\left[e^{2\pi S n(A+nL\eta)}-1\right]}\right\},$$

где ξ удовлетворяет неравенству (48).

В силу доказанного выше оно существует в интервале $0 \leqslant t \leqslant 2\pi S$ и непрерывно в нем. Никакого другого непрерывного решения, соответствующего тем же начальным условиям $\{z(0)\}$, не существует. Положим

$$\{z(2\pi S)\} = \{a\}$$

и напишем систему (6) в новой переменной τ,

$$\tau = t - 2\pi S;$$

тогда вследствие периодичности функций $A_{jk}(t)$, R_j и φ_j относительно t получим

$$\frac{dz_j}{d\tau} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(\tau)\, z_k + R_j(\tau, z_1, \ldots, z_n) +$$

$$+ \varepsilon Y_j(\tau + 2\pi S, \varphi_1(\tau) + z_1, \ldots, \varphi_n(\tau) + z_n). \tag{49}$$

Положим

$$Y_j(\tau + 2\pi S, \varphi_1(\tau) + z_1, \ldots, \varphi_n(\tau) + z_n) = U_j(\tau, z_1, \ldots, z_n).$$

В силу сделанных предположений (4) и (4′) о функциях Y_j, новые функции U_j будут снова удовлетворять условию 1°. Поэтому к решению системы (49), удовлетворяющему начальным условиям

$$\{z\,|_{\tau=0}\} = \{z\,|_{t=2\pi S}\} = \{a\},$$

опять применимы леммы II и III. Решение $\{z(t)\}$ таким образом продолжено на сегмент $2\pi S \leqslant t \leqslant 4\pi S$ и удовлетворяет на нем неравенству

$$|z_j(t)| \leqslant r(0)\, e^{2\pi S n(A+nL\eta)} + \frac{\varepsilon}{n(A+nL\eta)}\left[e^{2\pi S n(A+nL\eta)} - 1\right], \tag{50}$$

причем $r(4\pi S) < r(0)\, 2^{-\nu} + \delta$.

Отсюда по методу индукции заключаем, что решение $\{z(t)\}$ существует при всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяет при всех $t \geqslant 0$ неравенству (50). Правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой, если выбрать достаточно малыми $r(0)$ и ε.

А это означает, что периодическое движение $\{\varphi(t)\}$ *положительно осуществимо*, что и требовалось доказать.

Из осуществимости движения, разумеется, вытекает также осуществимость положительной полутраектории этого движения.

Заметим в заключение, что в целях упрощения вычислений все полученные оценки в количественном смысле были сделаны весьма грубыми. Условия, которые мы накладывали на правые части системы (1), также можно сделать более общими. Наложенные мною условия удобны в том отношении, что они легко проверяются в конкретных случаях.

Исследование систем 2-го типа мы дадим в следующей работе.

Ленинградский гос. астрономический институт.

Поступило 27.XII.1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Андронов А. и Понтрягин Л., Грубые системы, ДАН, т. XIV, № 5 (1937), 247—250.

[2] Андронов А. и Хайкин С., Теория колебаний, М. 1937, гл. V, § 10.

[3] Kamke E., Differentialgleichungen reeller Funktionen, Lpz. 1930.

[4] Artemieff N., Stabilité au sens de Liapounoff et nombre de solutions périodiques, Compositio Mathem., vol. 6, fasc. 1 (1938), p. 78—92.

N. ARTEMIEV. ÜBER REALISIERBARE BEWEGUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Wenn das System der Differentialgleichungen

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

einem physikalischen Prozess entspricht, so sind gewönlich die rechten Seiten der Gleichungen nur annähernd bekannt. Deshalb ist es von Interesse die Änderungen der Lösung dieses Systems, z. b. der Trajektorien, bei kleinen Änderungen der rechten Seiten des Systems zu studieren.

Wenn wir die qualitativen Eigenschaften der Lösungen untersuchen, so erweisen sie sich in den meisten Fällen mit dem Verhalten der Lösungen in dem unendlichen Zeitintervall verbunden.

Betrachten wir ausser dem System (1) noch das veränderte System

$$\frac{dy_j}{dt} = X_j(t, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon Y_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Es sei $\{\varphi(t)\}$, bei allen $t \geqslant 0$, die Lösung (oder die «Bewegung») des Systems (1). Betrachten wir ausser der Lösung $\{\varphi(t)\}$ noch die Lösung $\{\psi(t)\}$ des veränderten Systems (2). Es sei

$$|\psi_j(0) - \varphi_j(0)| \leqslant \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Definition. Wir nennen die Bewegung $\{\varphi(t)\}$ realisierbar, wenn man für ein noch so kleines $\eta > 0$, ein solches $\varepsilon(\eta) > 0$ finden kann, dass jede Bewegung $\{\psi(t)\}$ bei allen $t \geqslant 0$ existiert und dabei die Ungleichungen

$$|\psi_j(t) - \varphi_j(t)| \leqslant \eta, \quad t \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

erfüllt sind.

Es sei K^+ die Halbtrajektorie der Lösung $\{\varphi(t)\}$ des Systems (1), und L^+ die Halbtrajektorie der Lösung $\{\psi(t)\}$ des Systems (2). Bezeichnen wir mit $U_\eta(K^+)$, resp. $U_\eta(L^+)$ die η Umgebung der Halbtrajektorie K^+, resp. L^+.

Definition. Wir nennen die Halbtrajektorie realisierbar, wenn man für ein noch so kleines $\eta > 0$, solche $\varepsilon(\eta) > 0$ und $\alpha(\eta) > 0$ finden kann, dass jede Bewegung $\psi_t(a+\alpha)$ für $t \geqslant 0$, sowie die entsprechende Halbtrajektorie $L^+ \subset U_\eta(K^+)$ existiert.

In der vorliegenden Arbeit stellen wir eine genügende Bedingung dafür auf, dass die periodischen Bewegungen einer bestimmten Klasse realisierbar sind.

Редактор **В. А. Толстиков** Технический редактор **Е. Шнобель**

Сдано в набор 20/IV 1939 г. Подписано к печати 8/VII 1939 г.
Формат 70×108 см. в $^1/_{16}$. 8 печ. л. 45 000 зн. в печ. л. АНИ № 1769
Уполномоченный Главлита А-11814 Тираж 2 800 экз. Заказ 932

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9.